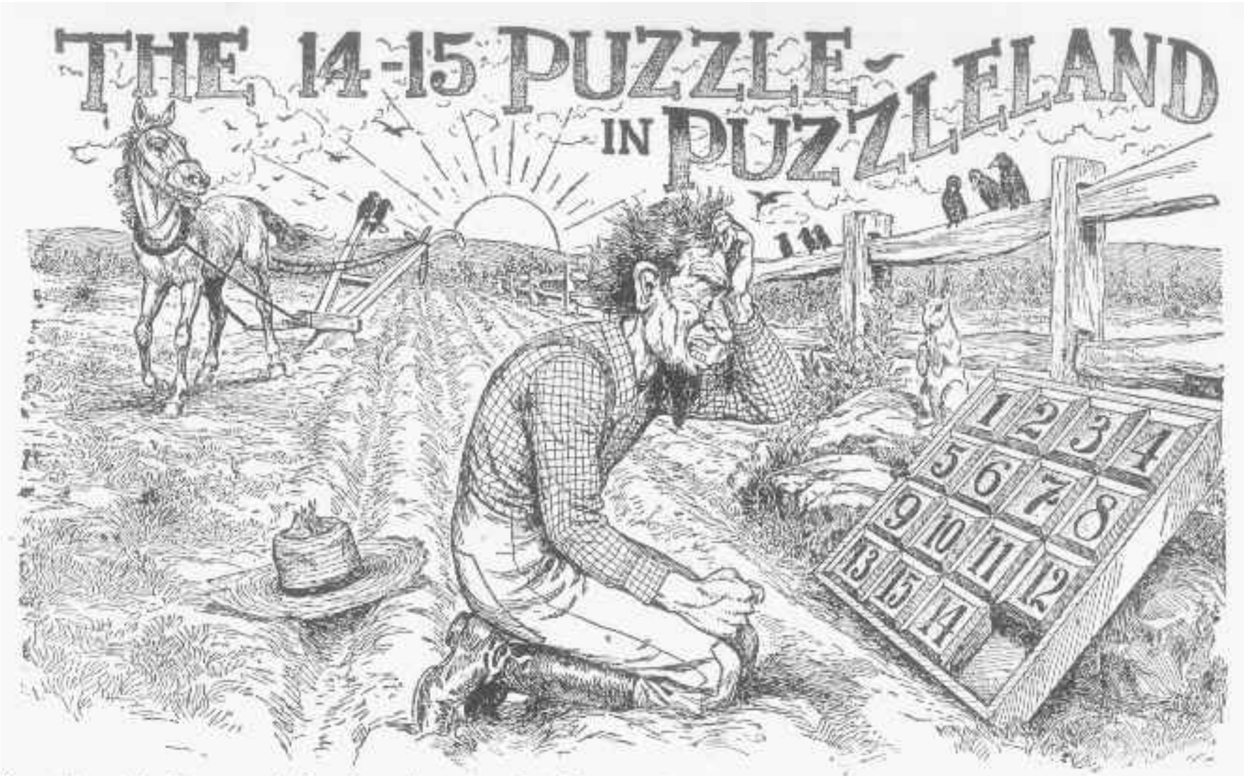
Versione on-line della presentazione. Per domande o osservazioni: emanuele.delucchi@supsi.ch

Il Gioco del 15



Emanuele Delucchi — Bellinzona, 14 settembre 2022

Domande

2	5	7	1
3	15		6
9	10	12	11
13	14	4	8

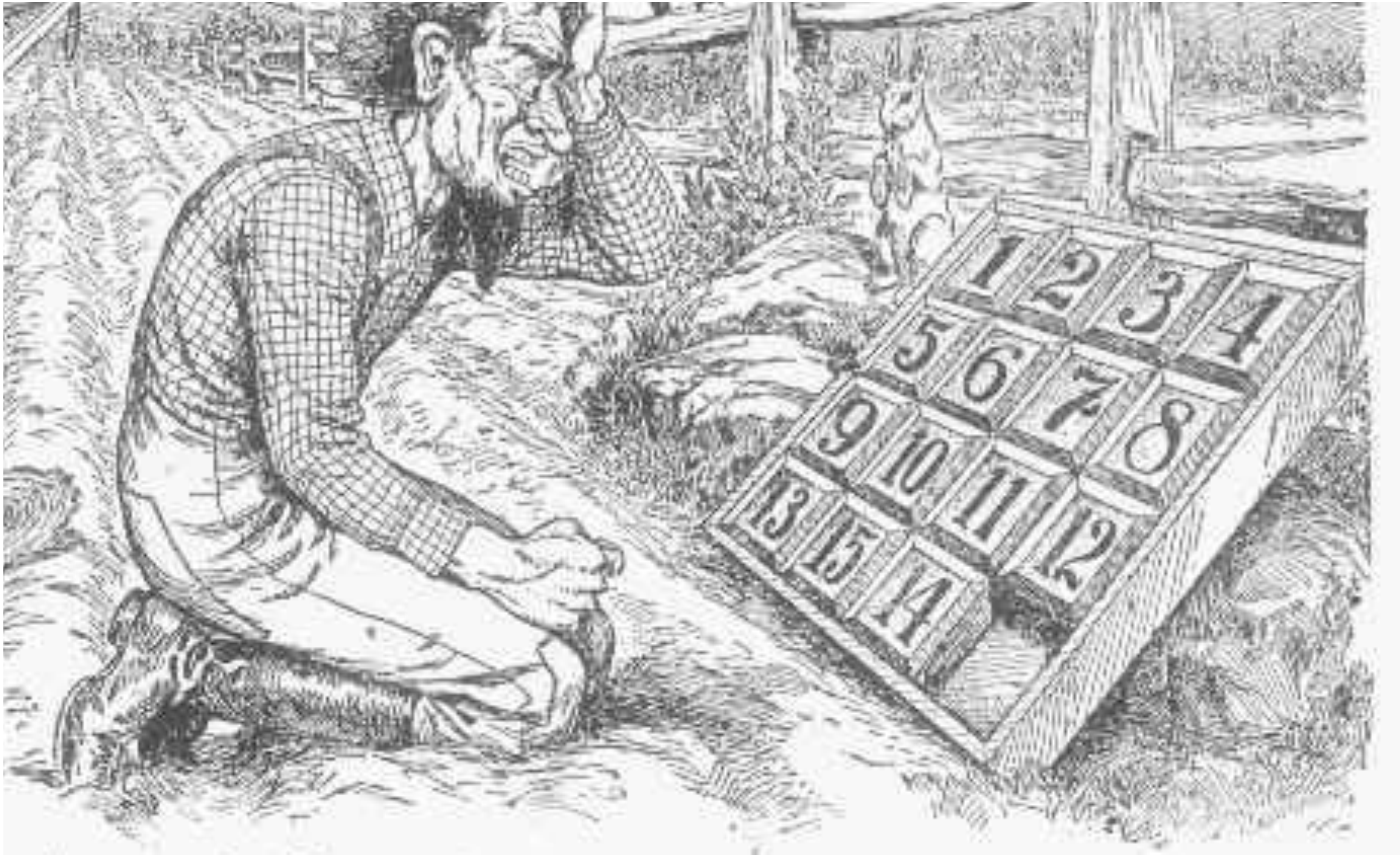
?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1. Il gioco è sempre risolvibile?

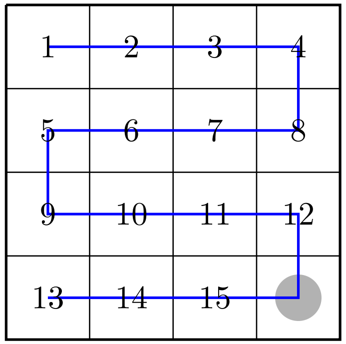
2. <u>Come</u> si risolve una data configurazione? (strategia)

Configurazione di Loyd.

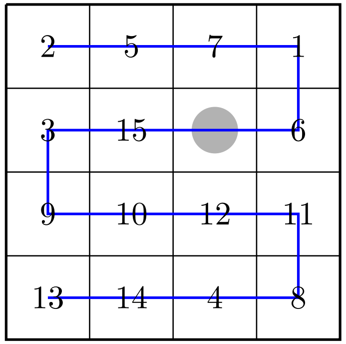


Idea

Modellizzazione tramite permutazioni



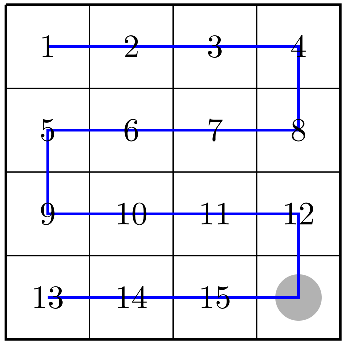
1	2	3	4	8	7	6	5	9	10	11	12	15	14	13



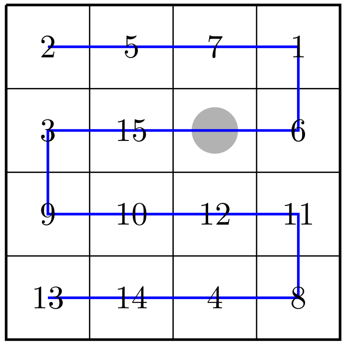
2	5	7	1	6	15	3	9	10	12	11	8	4	14	13

Idea

Modellizzazione tramite permutazioni



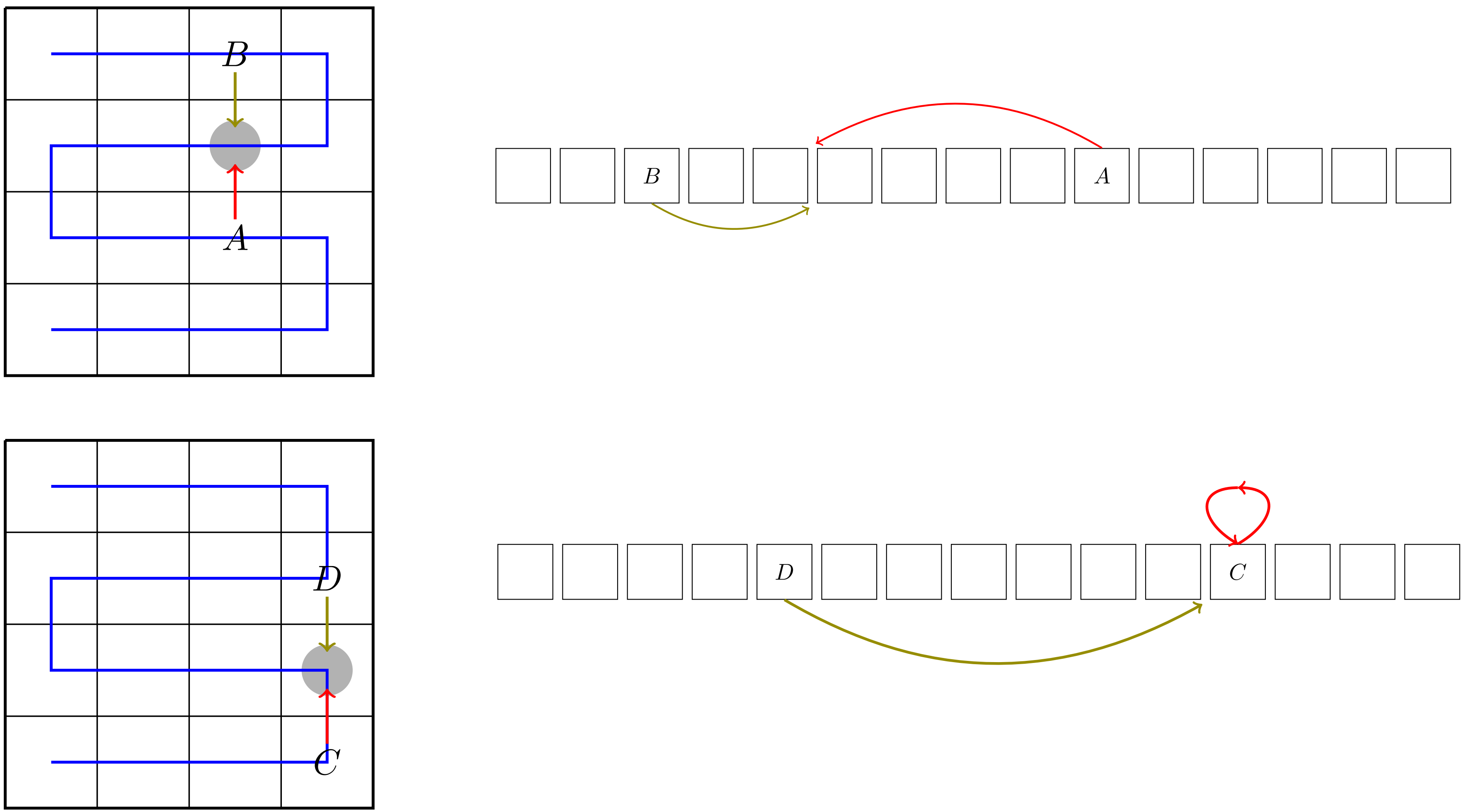
1	2	3	4	8	7	6	5	9	10	11	12	15	14	13



2	5	7	1	6	15	3	9	10	12	11	8	4	14	13

Domanda: come cambia la permutazione dopo <u>una</u> mossa?

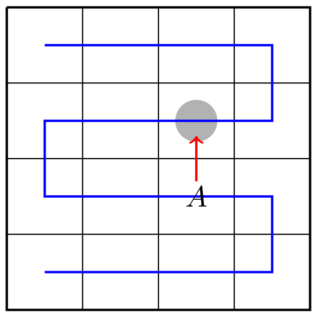
Mosse e permutazioni

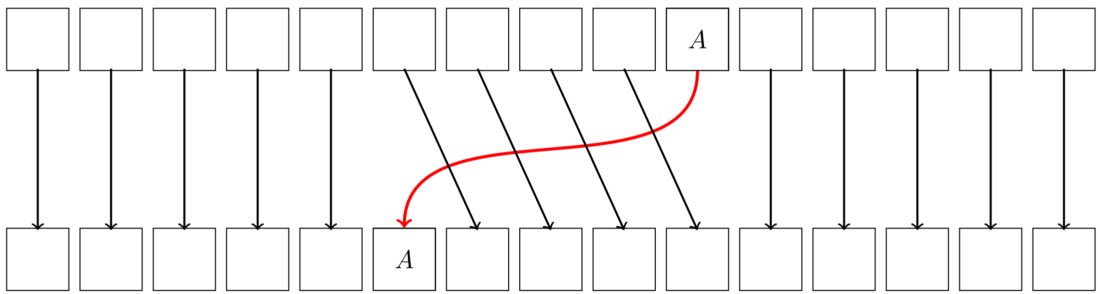


Ad ogni mossa un blocco “scavalca” un numero pari di altri blocchi.

Mosse e permutazioni

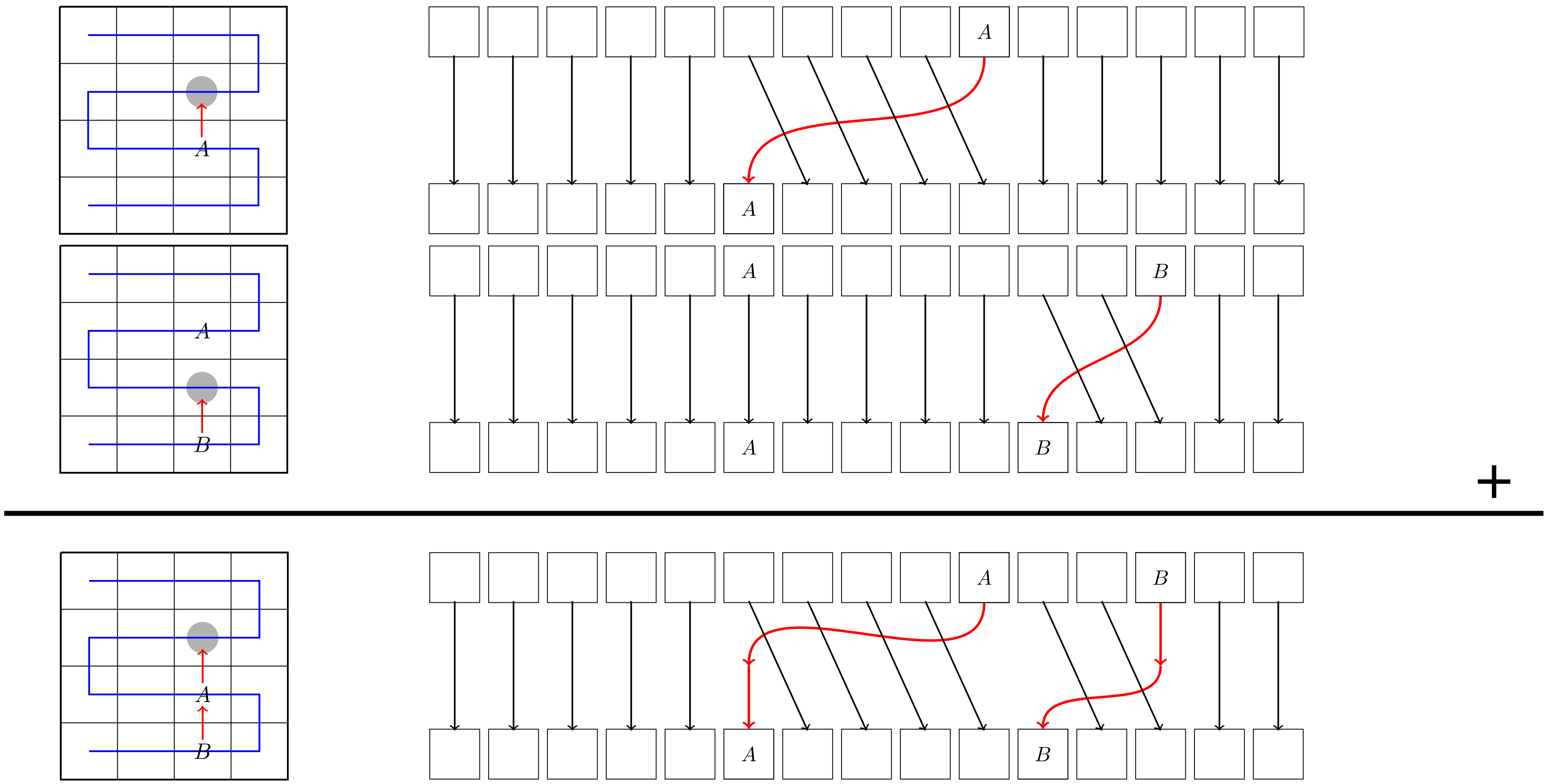
Nuova rappresentazione: trecce.





Mosse $\longleftrightarrow$ trecce con numero <u>pari</u> di incroci.

Mosse e permutazioni



(sequenze di) mosse ⟷ trecce con numero pari di incroci.

Matematica

La parità del numero di incroci di una treccia dipende solo dalla permutazione!

Perciò: ogni combinazione di mosse non può che produrre una permutazione con numero pari di incroci

(“la parità degli incroci é un’*invariante* del gioco”)

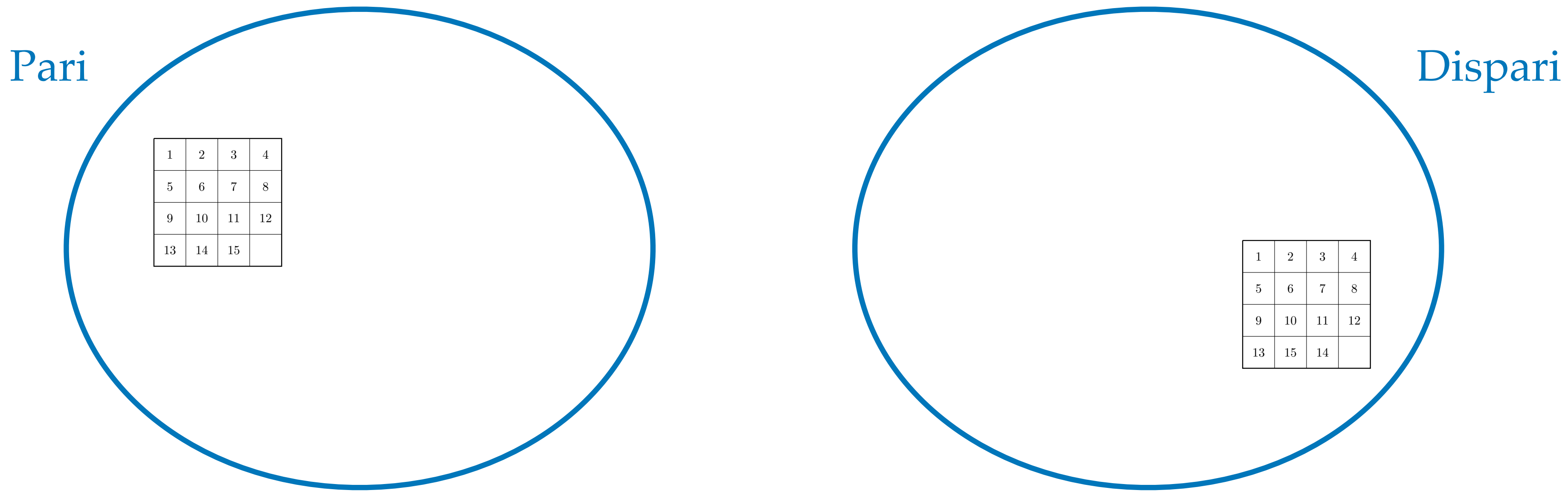
… e dunque la configurazione di Loyd non è risolvibile!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Analisi del gioco

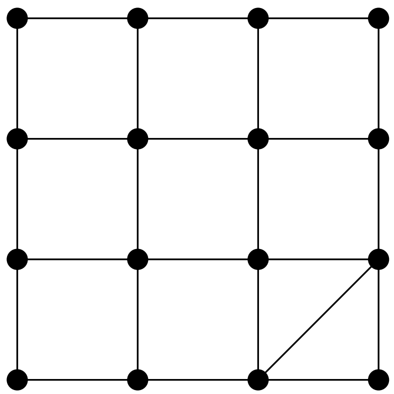
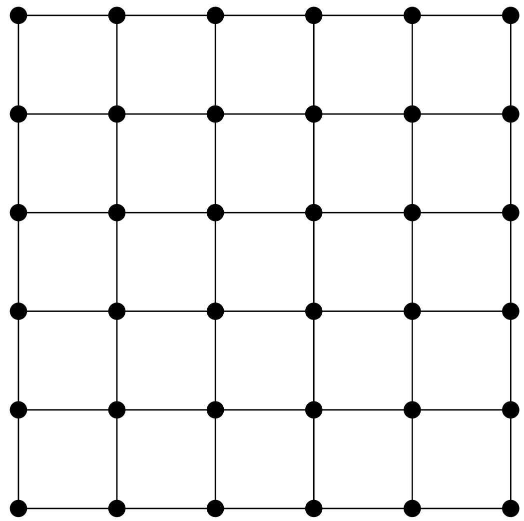
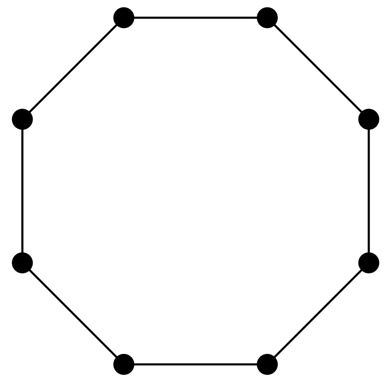
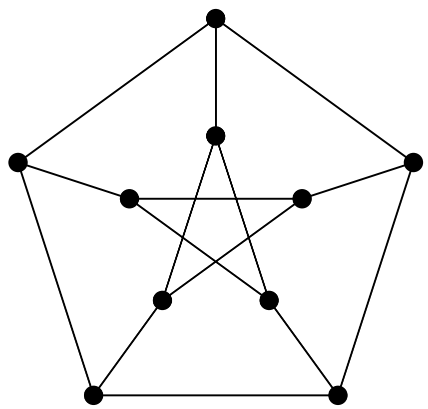
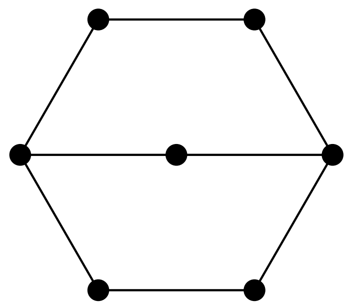
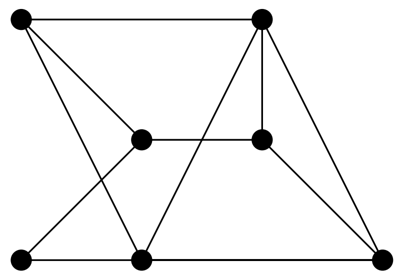
Due “compartimenti” di configurazioni, secondo la parità.



Ogni coppia di configurazioni dello stesso compartimento è collegata da una serie di mosse valide!

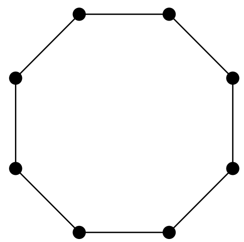
Un “15” è risolvibile se e solo se la sua permutazione è pari!

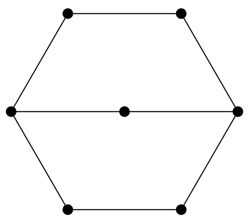
Altri grafi - nuovi giochi?

Teorema (Wilson, 1974)

Consideriamo il gioco con N pedine
su un grafo biconnesso G con N+1 vertici.

- Se G è un ciclo,  allora il gioco ha (N-1)! compartimenti.

- Se G è il grafo speciale  , il gioco ha 6 compartimenti.

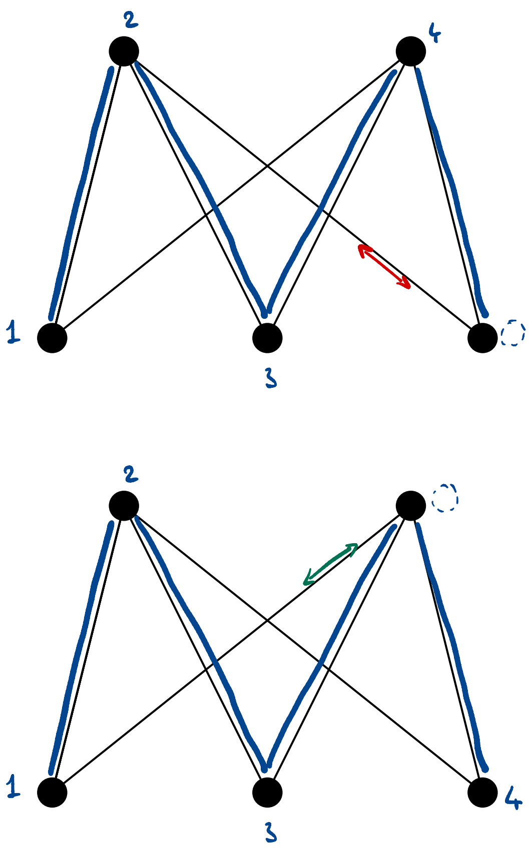
Altrimenti:

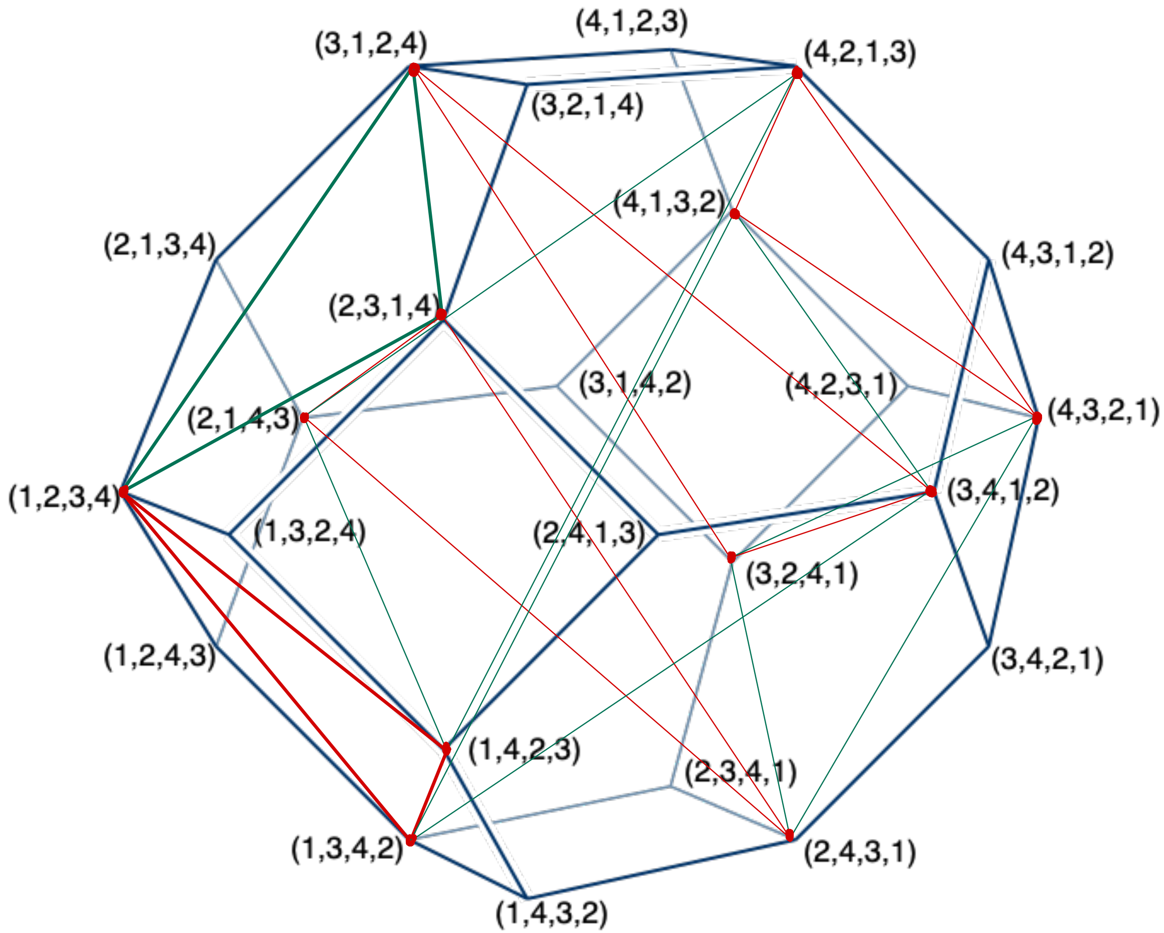
- Se G é bipartito, allora il gioco ha 2 compartimenti
- Se G non é bipartito, il gioco ha 1 compartimento (sempre risolvibile)

… e la strategia?

Strategie

Espressioni ridotte in gruppi / cammini minimali in grafi poliedrali.





Aspetti algoritmici e di implementazione
(es. algoritmo di Dijkstra).

Il gioco del 15 a scuola

- **Temi**: induzione, permutazioni (e: invarianti, gruppi…)
- **Esercizi** originali da esplorare a partire da piccoli esempi.
- Potenziale **modellizzazione** informatica.
- **Letteratura** accessibile senza molte conoscenze pregresse, e a “profondità arbitraria”.

Capitolo 7
Il Quindici: presentazione e prime domande

Molti fra i lettori si saranno divertiti a giocare al gioco del 15, uno dei più celebri fra i giochi con ‘blocchetti mobili’ che possono scorrere attraverso spazi vuoti.

D., Gaiffi, Pernazza
Giochi e percorsi matematici
Soringer 2012

A Modern Treatment of the 15 Puzzle

Aaron F. Archer

1. INTRODUCTION. In the 1870's the impish puzzlemaker Sam Loyd caused quite a stir in the United States, Britain, and Europe with his now-famous

A. Archer
American Mathematical Monthly
1995

JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (B) 16, 86–96 (1974)

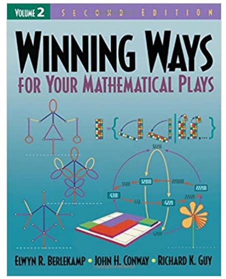
Graph Puzzles, Homotopy, and the Alternating Group*

RICHARD M. WILSON

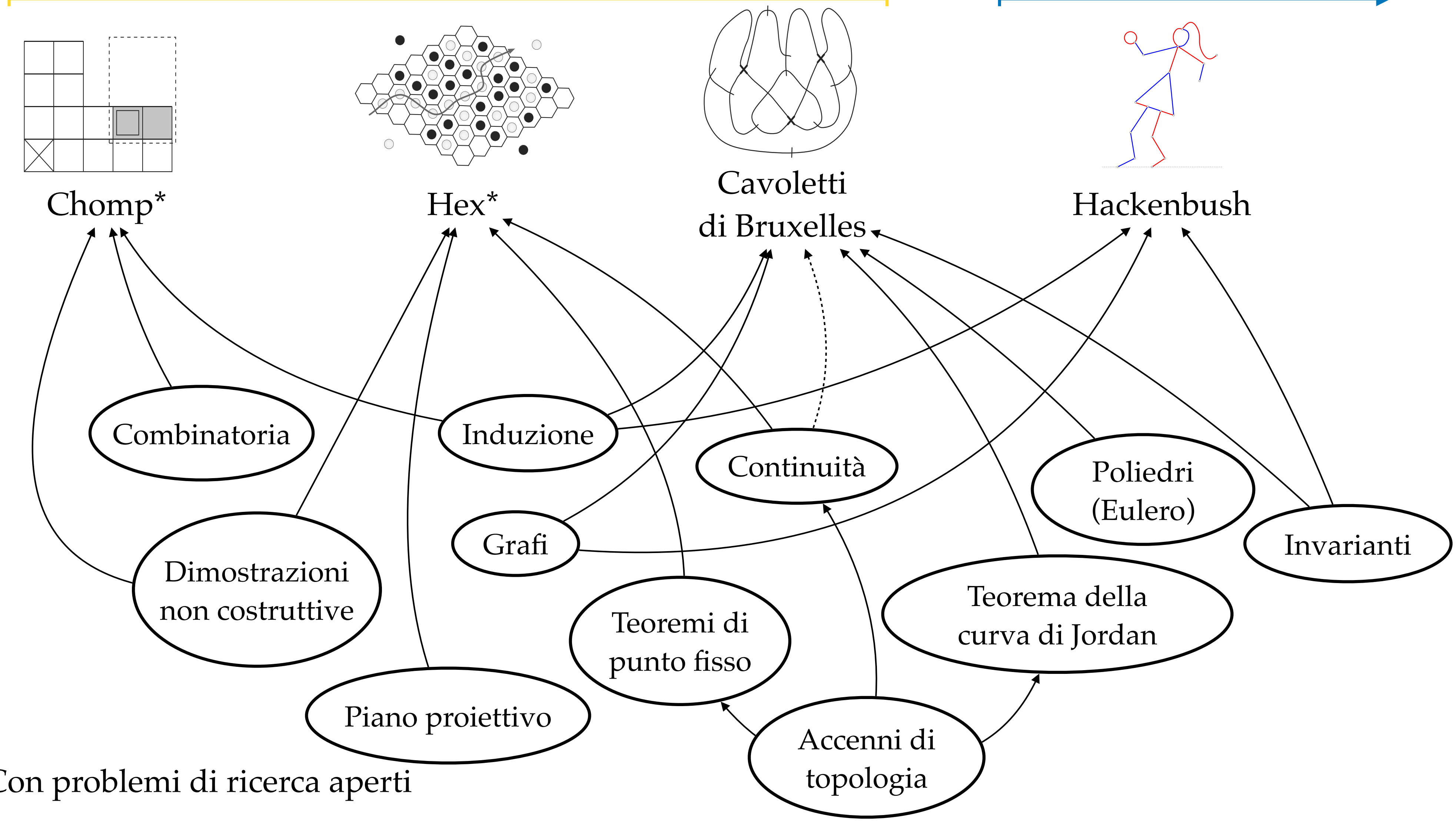
Richard Wilson
J of combinatorial theory (B)
1974

Altri giochi, altri temi

D., Gaiffi, Pernazza



Berlekamp, Conway, Guy



* = Con problemi di ricerca aperti