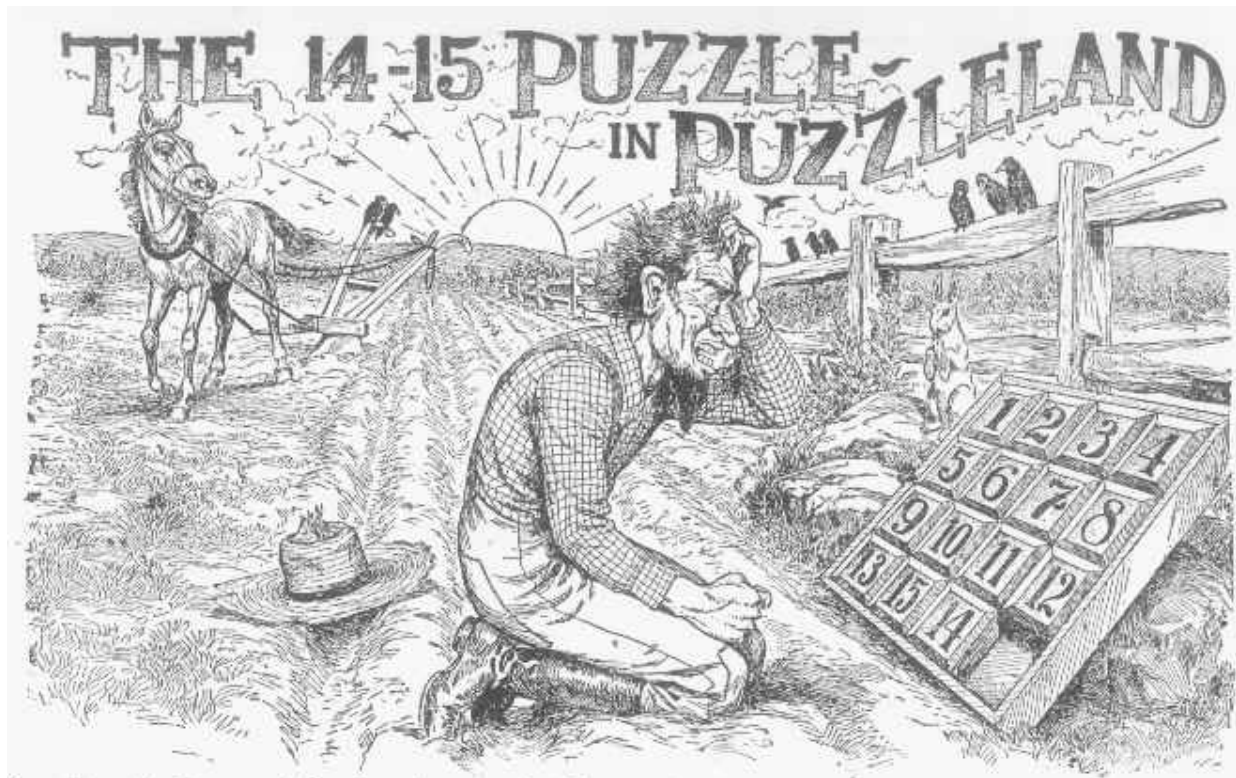


Das Fünfzehnerspiel



Emanuele Delucchi — Bellinzona, 14 September 2022

Das Fünfzehnerspiel

Oder:

*Analyse von Strategiespielen
als Zugang zur Mathematik
und Fundgrube für Maturarbeiten.*

Fragen

2	5	7	1
3	15		6
9	10	12	11
13	14	4	8



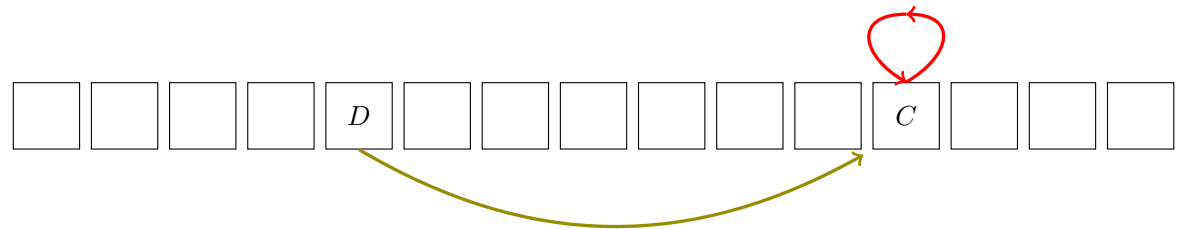
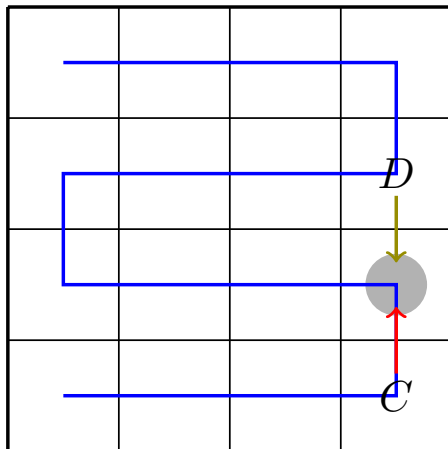
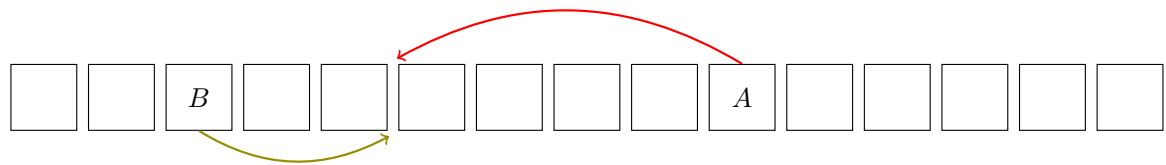
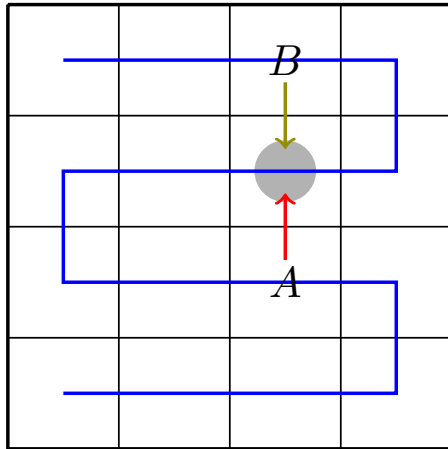
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1. Kann das Spiel immer gelöst werden?
2. Wie löst man eine bestimmte Konfiguration? (Strategie)

Loyd-Konfiguration.

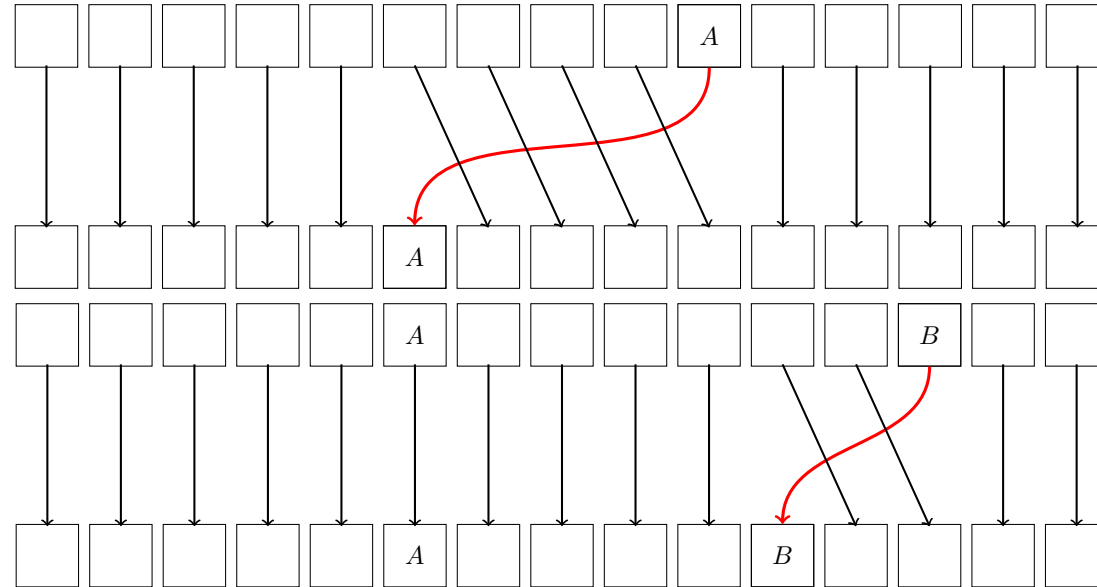
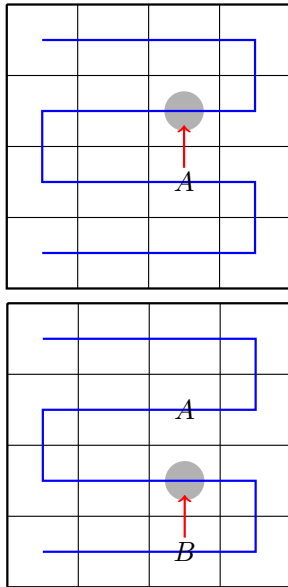


Züge und Permutationen

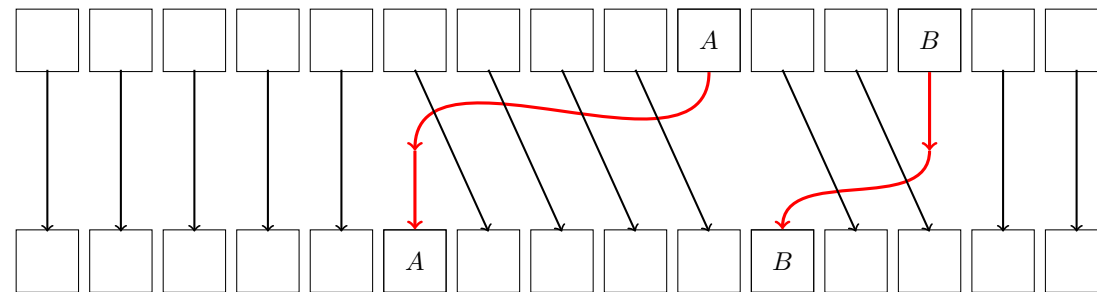
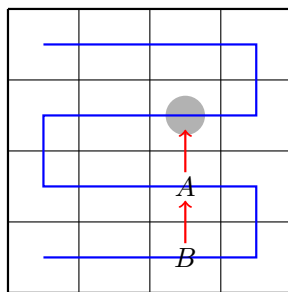


Ein Block "springt über" eine gerade Anzahl anderer Blöcke

Züge und Permutationen



+



(Folgen von) Zügen \longleftrightarrow Zöpfe mit gerader Anzahl Kreuzungen.

Mathematik

Die Parität der Anzahl Kreuzungen eines Zopfes hängt nur von der zugehörigen Permutation ab!

Deshalb: jede Folge zulässiger Züge kann nur Permutationen mit gerader Anzahl Kreuzungen erzeugen.

(“die Parität der Permutation ist eine *Invariante* des Spieles”)

...somit ist die Konfiguration von Loyd nicht lösbar!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Analyse des Spieles

Zwei “Abteile” von Konfigurationen, je nach Parität.

Gerade

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

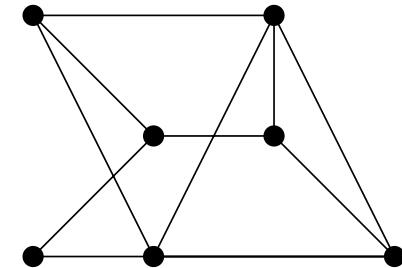
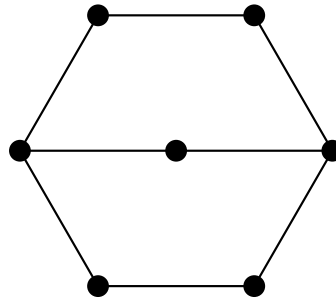
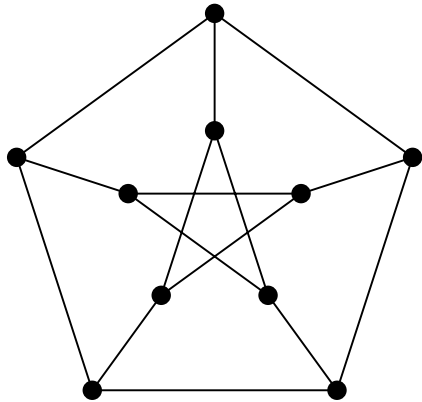
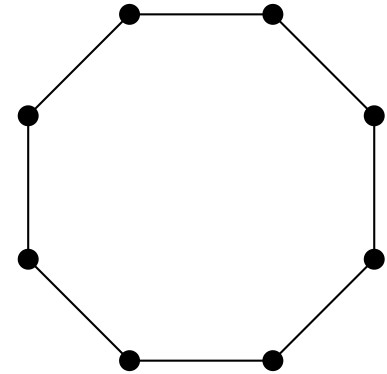
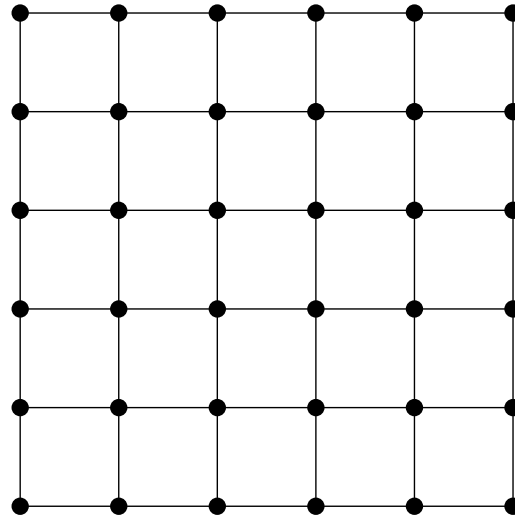
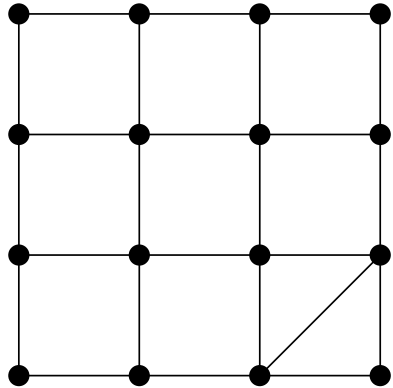
Ungerade

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Je zwei Konfigurationen aus demselben Abteil können durch eine Folge zulässiger Züge ineinander überführt werden!

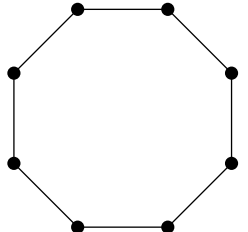
Ein Spiel ist genau dann lösbar, wenn seine Permutation gerade ist!

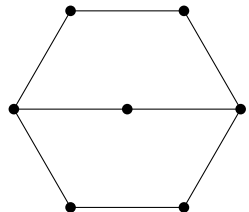
Andere Graphen, neue Spiele



Satz [Wilson, 1974]

Betrachte einen Spiel mit N steine auf einem **2-zusammenhängenden** graphen G mit $N+1$ Ecken.

- Falls G ein Zykel  ist, dann gibt es $(N-1)!$ Abteile.

- Falls G das spezielle graph  ist, dann gibt es 6 Abteile.

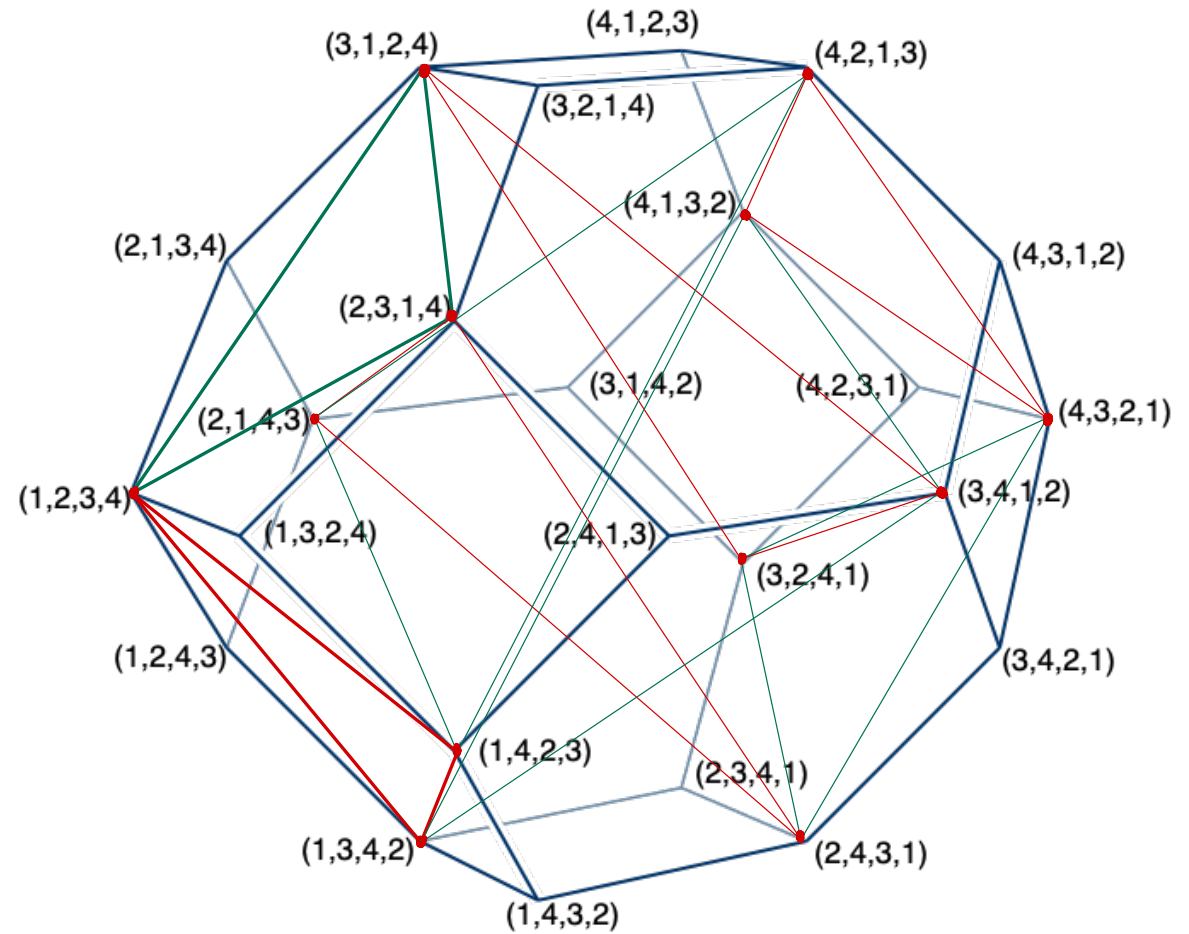
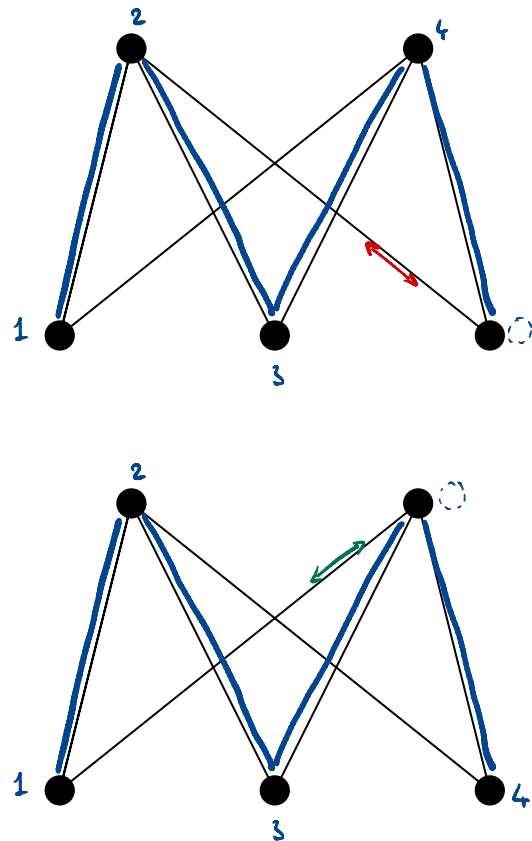
Andernfalls:

- Ist G **bipartit**, so hat das Spiel 2 Abteile;
- Ist G **nicht bipartit**, so hat das Spiel 1 Abteil (immer lösbar).

... wie steht es mit Lösungsstrategien?

Strategie

Reduzierte Worte in Gruppen / minimale Pfade in Graphen.



Algorithmische Aspekte, inkl. Implementierung.
Beispiel: Kürzeste-Pfade-Algorithmus von Dijkstra.

Das Fünfzehnerspiel in der Schule

- **Themen:** Induktion, Permutationen (und: Invarianten, Gruppen)
- Originelle, “natürliche”, und zugängliche **Fragestellungen**.
- Potentielle Einbindung von **Algorithmen** / Informatik.
- **Literatur** ist ohne spezielle Vorkenntnisse zugänglich, und ist in beliebiger “Tiefe” Verfügbar.

Capitolo 7

Il Quindici: presentazione e prime domande

Molti fra i lettori si saranno divertiti a giocare al gioco del 15, uno dei più celebri fra i giochi con ‘blocchetti mobili’ che possono scorrere attraverso spazi vuoti.

D., Gaiffi, Pernazza
Giochi e percorsi matematici
Springer 2012

A Modern Treatment of the 15 Puzzle

Aaron F. Archer

1. INTRODUCTION. In the 1870's the impish puzzlemaker Sam Loyd caused quite a stir in the United States, Britain, and Europe with his now-famous

A. Archer
American Mathematical Monthly
1995

JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (B) 16, 86-96 (1974)

Graph Puzzles, Homotopy, and the Alternating Group*

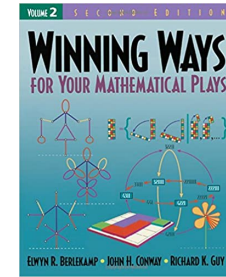
RICHARD M. WILSON

Richard Wilson
J of combinatorial theory (B)
1974

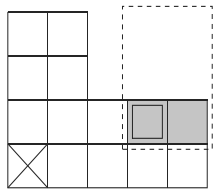
Andere Spiele, weitere Themen



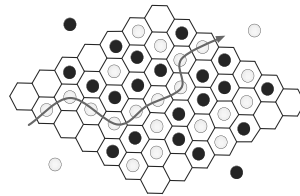
D., Gaiffi, Pernazza



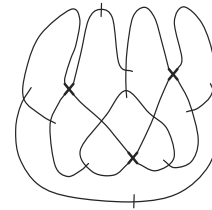
Berlekamp, Conway, Guy



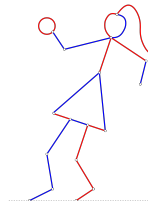
Chomp*



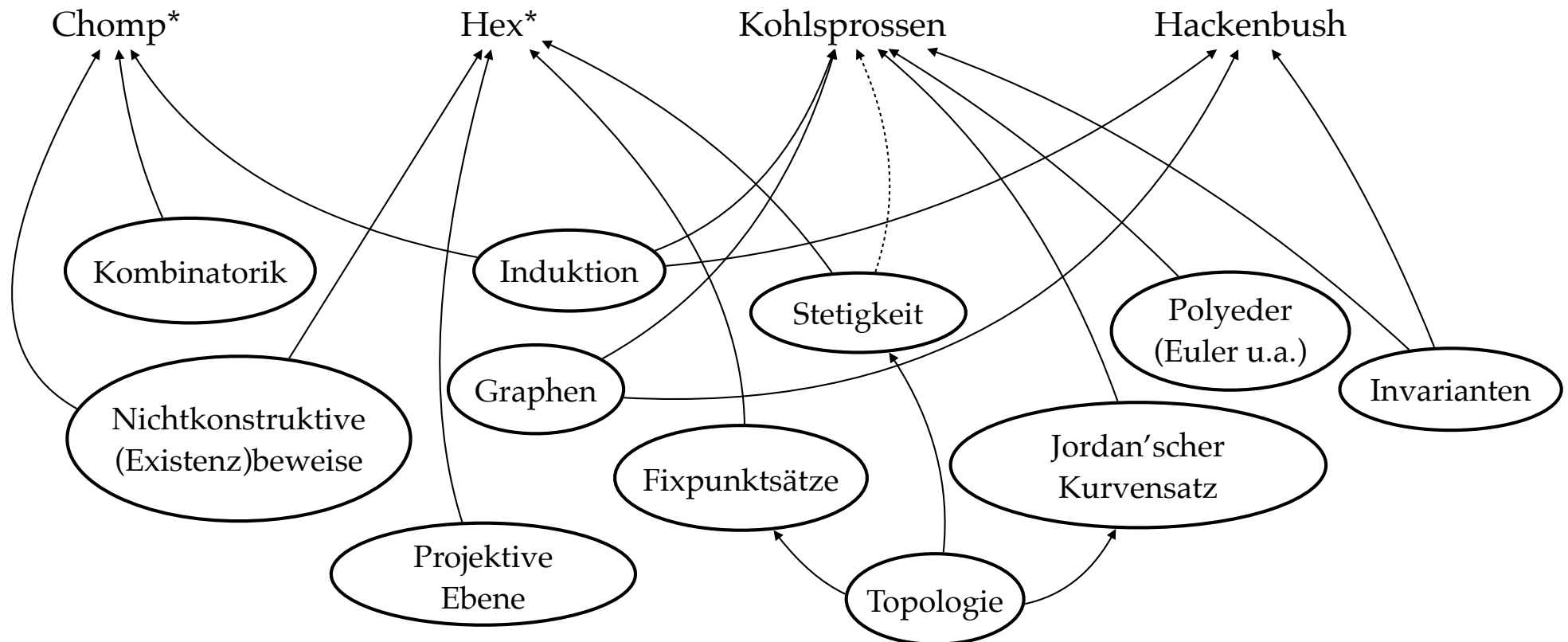
Hex*



Kohlsprossen



Hackenbush



* = Mit offenen (Forschungs)problemen