Didaktik

Scuola Cantonale di commercio di Bellinzona

Wahlfach und/oder Matura-Arbeit mit aktuarieller Mathematik als Thema

PPCmetrics AG
Giorgio Barozzi
Aktuar SAV, eidg. dipl. Pensionsversicherungs-Experte, MSc ETH Math
Senior Actuarial Consultant

Bellinzona, 14. September 2022

Der Beruf des Aktuars

- Das Berufsbild des Aktuars hat sich seit dem 18. Jahrundert bis heute **weiterentwickelt**.
  - Der «erste Typ» des Aktuars ist der **deterministische** Lebensversicherungsaktuar (18. Jahrhundert)
  - Der «zweite Typ» von Aktuar wird als **stochastischer** Nicht-Lebens-Aktuar bezeichnet (Anfang des 20. Jahrhunderts)
  - Ein weiterer Schritt, der «dritte Typ» von Aktuar, kam mit der Anwendung versicherungsmathematischer Techniken auch im **aktiven Teil** der Bilanzen – dem Asset-Liability-Management (1980er Jahre)
  - Der Aktuar des «vierten Typs» wird als Enterprise-Risk-Manager bezeichnet und befasst sich mit der ganzheitlichen Betrachtung des **Risikomanagements** (Anfang 2000)
  - In den kommenden Jahren wird sich im Zusammenhang mit neuen **Big-Data-** und **Machine-Learning-Technologien** ein «fünfter Typ» von Aktuar entwickeln

Übersicht über ein mögliches Programm

Versicherungsmathematik in der Oberstufe der Mittelschule

- Die Versicherungsmathematik des Aktuars des «ersten Typs» basiert auf einer **Weiterentwicklung der klassischen Finanzmathematik**, einem Fach, das bereits an der SCC gelehrt wird.
  - Es ist daher auf dieser Ebene auch auf «quantitativen» Niveau gut **unterrichtbar**.
- Im Gegensatz dazu ist die Mathematik für spätere Arten von Aktuaren **anspruchsvoller** und kann auf einer qualitativen/interpretativen Ebene gelehrt werden.
  - Der Hauptgrund dafür ist die Notwendigkeit, kompliziertere Modelle zu entwickeln, da **mehrere Zufallsvariablen zusammentreffen** (z.B. doppelte Unsicherheit über den Zeitpunkt und die Höhe der Leistung in der Schadenversicherung).

Übersicht über ein mögliches Programm (1)

- Quantitativer Teil: **Mathematik der Lebensversicherung** (Einzel- und Gruppenversicherung)
  - Rekapitulation der Finanzmathematik
  - Messung der Sterblichkeit und Aufbau der technischen Grundlage
  - Individuales Äquivalenzprinzip
  - Entwicklung von Formeln in Verbindung mit den wichtigsten Lebensversicherungsprodukten (Todesfallrisiko) – Prämien und Rückstellungen
  - Entwicklung von Formeln in Zusammenhang mit den wichtigsten Lebensversicherungsprodukten (Invaliditätsrisiko) – Prämien und Rückstellungen
  - Einkommensquellen für einen Lebensversicherer
  - Gewinn-Analyse

Übersicht über ein mögliches Programm (2)

- Qualitativer Teil: **Verständnis der Versicherungswelt** (aktuelle Marktsituation, Interpretation von Theorien,…)
  - Geschichte der Versicherung
  - Die Verschiedenen Arten von Risiken, die heute versichert sind
    - Sozialversicherung vs. Privatversicherung
    - Neue Technologien, neue Risiken und neue Versicherungsprodukte?
  - Verschiedene Finanzierungsarten und die Vorteile ihrer Kombination
  - Warum versichern? Drei grundlegende Theorien
    - Das Gesetz der grossen Zahlen
    - Ruinen-Theorie
    - Erwartungsnutzentheorie
  - Der Beruf des Aktuars: die verschiedenen («Typen» und die Anwendung dieser Berufsprofile in der Arbeitswelt

Programmentwicklung im Unterricht

- Dieses Programm würde den Studenten ein Thema näher bringen, das in der «**realen Welt**» sehr präsent ist, sowie die Welt der Versicherungsmathematik für ältere Studenten.
  - Die Schweizerische Aktuarvereinigung (SAV) ist daran interessiert, reifere Studenten für ein Studium der Aktuar Wissenschaften zu gewinnen (sie studiert seit Jahren Förderprogramme) – **Synergiepotenzial**
- Man könnte sich vorstellen, den ersten qualitativen Teil als Universitätsseminar mit **Präsentationen** der Studenten zu gestalten.
  - Diese Lösung kann auch Studenten **ansprechen**, die nicht allzu «im Rechnen» begabt sind
  - Mathematik ist eben nicht nur Rechnen, sondern sie hat in ihrer Forschung vor allem eine philosophische und **intuitive** Seite (die bis zur Uni-Niveau eher vernachlässigt wird)

1. Quantitativer Teil

Einführung: Messung der Sterblichkeit

Rekapitulation der Finanzmathematik

Das Äquivalenzprinzip

Berechnung der Barwerte einiger Versicherungsprodukte

Berechnung der Jahresprämien

Einführung: Das Deckungskapital

Einführung: Messung der Sterblichkeit

Ansätze zur Messung

- Klassische Sterblichkeits-/Invaliditätsmodelle unterscheiden sich leicht zwischen Lebensversicherern und Pensionskassen
  - Sie entwickeln ihre technischen Grundlagen selbständig
  - Die Bezeichnungen sind jedoch dieselben
- Die **Sterbetafeln der «Pensionskassen»** erscheinen alle 5 Jahre und werden von den grössten öffentlichen (VZ) und den grössten privaten (BVG) Pensionskassen entwickelt
- Die **Sterbetafeln der Lebensversicherer** (E/G K/R M/F, z.B. GKM) werden von den Mitgliedsunternehmen der SAV (Schweizerische Aktuarvereinigung) entwickelt, die jedes Jahr ihre Beobachtungen einreichen
  - Seit 1995 verwendet jeder Versicherer seine eigenen Tabellen, bis 1995 waren die Tabellen für alle Versicherer gleich

Finanzmathematik - Zusammenfassung

Rekapitulation der Finanzmathematik (1)

- In der klassischen Finanzmathematik wird ein **konstanter Zinssatz zur Bewertung** (Diskontierung) zukünftiger (in der Gegenwart sicherer) Zahlungen angenommen
- Nehmen wir wie in den GKM-Tabellen 95 i=3.5% (und damit einen Abzinsungsfaktor $v = 1.035^{-1} = 0.966$) an
- Der Barwert einer Zahlung von CHF 100 in 20 Jahren ergibt sich aus der Formel CHF $100 \cdot v^{20}$= CHF 50.25.
  - Der Zinseffekt (der so genannte dritte Beitragszahler in der 2. Säule) ist also intuitiv **enorm**.
- Unter Berücksichtigung eines Zinssatzes von i=2%, einem für die heutige Zeit immer noch sehr hohen risikofreien Zinssatz, steigt der aktuelle Wert auf 67.30 CHF.
  - Ein **Anstieg von 33.9%** gegenüber dem vorherigen Wert!

Rekapitulation der Finanzmathematik (2)

- Betrachten wir nun den Barwert einer **befristeten, sicheren Rente** von 20 Jahren in Höhe von 5 CHF pro Jahr (also insgesamt 100 CHF): $5 \cdot ä_{n=20} = 5 \cdot (1+v+\ldots+v^{19}) = 5 \cdot (1-v^{20})/(1-v) = 5 \cdot 14.71 = \text{CHF } 73.55$
- Bei i=2% ist $ä_{n=20}$=16.68 und der Barwert der Rente beträgt CHF 83.40.
  – Die entspricht einem **Anstieg von 13.4%** (warum weniger als zuvor?)
  – Die durchschnittliche Dauer beträgt 9.17, bei i=3,5% 8.93.
- Die Änderung des technischen Zinssatzes für die Bewertung der Rentner ist in diesen Jahren sehr niedriger risikofreier Zinssätze ein **zentrales Thema**
  – Schon ein geringer Rückgang des technischen Zinssatzes kann zu einer technischen Unterdeckung der Pensionskasse führen (und Sanierungsmechanismen auslösen)

Das Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip

- Das **Äquivalenzprinzip** besagt, dass die eingenommen Prämien und die gezahlten Leistungen (und Entstandenen Kosten) übereinstimmen müssen:

  Erwartungswert der Prämien = Erwartungswert der Leistungen (und Kosten)

- Wenn aber Einnahmen und Ausgaben im Durchschnitt gleich sind, **wie kann man dann einen Gewinn erzielen**?
  - Sicherheitsmargen bei den Wahrscheinlichkeiten (**Überschätzung der Risiken**)
  - Höhere **Kapitalrendite** als Zinszahlungen
  - Höhere in Rechnung gestellte **Kosten** als tatsächliche Kosten
  - Geringere Rückkaufswerte oder Verfall der **Überschüsse** im Falle einer Kündigung

Notationen

- x, y — x ist das Alter eines Mannes, y ist das Alter einer Frau
- l_x — Ordnung der Lebenden (per Definition l_{15}=100’000 und $l_{\omega+1}=0$)
- d_x — Anzahl der Todesfälle im Alter x
- $p_x = l_{x+1} / l_x$ — Überlebenswahrscheinlichkeit im Alter x
- $q_x = d_x / l_x$ — Wahrscheinlichkeit des Todes im Alter x
- $v=1 / (1+i)$ — Diskontierungsfaktor
- $D_x=v^x \cdot l_x$ — Kommutations-Zahlen der Lebenden
- $C_x=v^{x+1} \cdot d_x$ — Kommutations-Zahlen der Toten
- $N_x= D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$
- $M_x= C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega$

Berechnung der Barwerte einiger Versicherungsprodukte

Der erwartete Wert einer Leibrente

- Angenommen, ein 65-jähriger Mann möchte wissen, wie viel **Kapital** (Einmalprämie) benötigt wird, um es in eine lebenslange Rente von 12'000 CHF pro Jahr umzuwandeln.
- Wir stützen uns dabei auf das Äquivalenzprinzip, das besagt, dass Einnahmen und Ausgaben gleich hoch sein müssen (in der Nettobetrachtung):

$$l_{65}\, ä_{65} = l_{65} \cdot 1 + l_{66} \cdot v + l_{67} \cdot v^2 + \ldots + l_\omega \cdot v^{\omega-65}$$

$$D_{65}\, ä_{65} = D_{65} + D_{66} + \ldots + D_\omega = N_{65}$$

$$ä_{65} = N_{65} / D_{65} = 127'296.34 / 8'935.97 = 14.245$$

- Die einmalige Nettoprämie beträgt 14'245 * 12'000 CHF = 170'945 CHF

Der Erwartungswert einer Todesfallversicherungspolice

- Angenommen, ein 30-Jähriger möchte wissen, wie viel Kapital er benötigt, um sich **bis zur Pensionierung** (65) mit einer Leistung von 100'000 CHF gegen das **Todesfallrisiko abzusichern.**
- Wir stützen uns dabei auf das Äquivalenzprinzip, das besagt, dass Einnahmen und Ausgaben gleich hoch sein müssen (in der Nettobetrachtung):

$$l_{30} \cdot {}_{35}A_{30} = d_{30} \cdot v + d_{31} \cdot v^2 + \ldots + d_{64} \cdot v^{64-30+1}$$

$$D_{30} \cdot {}_{35}A_{30} = C_{30} + C_{31} + \ldots + C_{64} = M_{30} - M_{65}$$

$${}_{35}A_{30} = (M_{30} - M_{65}) / D_{30} = (7'737.41-5'184.58)/34'856.01 =$$
$$= 0.07324$$

Einmalige Zahlung von 0.07324 * 100’000 CHF = 7’323.95 CHF

Berechnung der Jahresprämien

Die Jahresprämie für eine Todesfallversicherung

- Anstatt die Prämie bei Vertragsabschluss in einer Summe zu zahlen, möchte der Versicherte während der Laufzeit der Versicherung eine Jahresprämie entrichten.
- In diesem Fall wird die Einmalprämie vom Versicherten als lebenslange Rente (befristet auf 35 Jahre) an die Versicherungsgesellschaft gezahlt:

$PA \cdot ä_{30:35} = {}_{35}A_{30}$

$\mathbf{PA = {}_{35}A_{30} / ä_{30:35}} = ((M_{30} - M_{65}) / D_{30}) / ((N_{30} - N_{65}) / D_{30})$

$= (M_{30} - M_{65})/(N_{30} - N_{65}) = 2'552.83/697'667.43 = 0.003659$

Jahresprämie von 0.003659 * 100’000 CHF = 365.90 CHF

Einführung: Das Deckungskapital

Das Deckungskapital

- Das Deckungskapital ist der Barwert künftiger Zahlungsströme (prospektives Deckungskapital) oder vergangener Zahlungsströme (retrospektives Deckungskapital).
- Aufgrund des **Äquivalenzprinzips** stimmen die prospektiven und retrospektiven Deckungskapitalen überein.
- Zu Beginn und am Ende einer Versicherungsperiode ist das Deckungskapital natürlich 0.
- Das Deckungskapital kann auch **rekursiv** berechnet werden.
- Das Deckungskapital entspricht auch der **Summe der** bisher angesammelten **Sparprämien** mit Zinsen.

Die Formeln für das Deckungskapital

- Das Deckungskapital stellt somit den Wert des Versicherungsvertrags zu einem bestimmten Zeitpunkt dar und ist der Wert, der in der Bilanz zurückgestellt werden muss.
- Im Allgemeinen ist die Berechnung der prospektiven Reserve einfacher als die der retrospektiven Reserve, da sie durch Diskontierung berechnet wird
- Das Deckungskapital für eine **Leibrente**, wenn der Versicherte 75 Jahre alt ist, beträgt beispielsweise

  ${}^{pro}V_{75}$ = Barwert der künftigen Leistungen - Barwert der künftigen Beiträge

  $=\ddot{a}_{75}$ - 0 = 10.7387 (Deckungskapital von 107‘387 CHF)

2. Qualitativer Teil

Gesetz der grossen Zahlen

Ruin-Theorie

Erwartungsnutzen-Theorie

Gesetz der grossen Zahlen

Das Gesetz in formaler Form

Satz (Ausgleich im Kollektiv, Version I)

Es sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[Y_i] < \infty$ für $i \in \mathbb{N}$. Für alle $\varepsilon > 0$ folgt dann

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.}$$

- Leider sind die Risiken in der realen Welt weder unabhängig noch gleichmäßig verteilt (z. B. Risiken wie Überschwemmungen oder Sterblichkeit bei Ehepartnern).
- Glücklicherweise gibt es eine **allgemeinere Variante des** Gesetzes:

Satz (Ausgleich im Kollektiv, Version II)

Es sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(Y_i) < \sigma^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } |i-j| > n_0 \tag{1}$$

und eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i]\right| \geq \varepsilon\right) = 0.} \tag{2}$$

Interpretation in der Praxis

- Das Gesetz besagt im Wesentlichen, dass der Mittelwert der Realisierungen einer Zufallsvariablen mit dem Mittelwert ihrer Verteilung **konvergiert** - und zwar **an mehreren Fronten (gegenüber der Zeit oder der Anzahl Risiken)**
- Betrachtet man das Gesetz aus wirtschaftlicher Sicht, so kann man also sagen, dass es sehr sinnvoll ist, viele Risiken **in einer Versicherungsgesellschaft zu kumulieren**, weil:
  - **Schwankungen der** Ergebnisse (an mehreren Fronten) **nehmen ab**
  - Man eine Annäherung (an mehreren Fronten) an den Mittelwert hat, die die Entwicklung einer **Finanzplanung für das Unternehmen** ermöglicht

Ruin-Theorie

Die Ruin-Theorie

- Angenommen, eine Versicherungsgesellschaft versichert mehrere Risiken und erhebt zur Finanzierung von Schäden eine **Prämie, die dem Durchschnittswert der** Verteilung **entspricht.**
- Die Ruin-Theorie (als direkte Folge des Gesetzes der grossen Zahlen) besagt im Grunde, dass - bei diesem Ansatz und **unabhängig vom anfänglichen Sicherheitskapital -** Ruin mit Sicherheit (irgendwann in der Zukunft) eintreten wird.
- Intuitiv ist dieses Gesetz klar, da es einen deterministischen Wert mit einem Zufallswert vergleicht, der früher oder später die Summe des Eigenkapitals mit den eingenommenen Prämien übersteigen wird.
- Die Mindestvoraussetzung für das Überleben eines Versicherers besteht also darin, eine Prämie zu verlangen, die höher ist als der durchschnittliche Wert des versicherten Risikos:

$$\pi > \mathbb{E}[X]$$

- Diese Theorie kann als Grundlage für die **Existenz eines Risikomanagements** innerhalb eines Versicherungsunternehmens definiert werden.

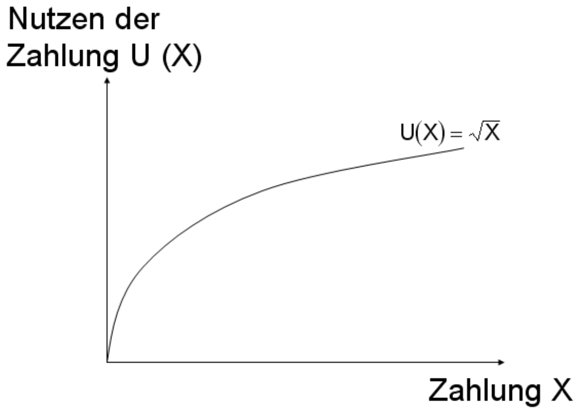
Exkurs
Solvabilität und Risk-Management

- Die klassische Definition des Ruins entspricht der **Zahlungsunfähigkeit** eines Unternehmens.
- Mit den Basler Vereinbarungen (I, II und III) wurde das Konzept der **Solvabilität** eingeführt, das lange vor einer Zahlungsunfähigkeit entsteht.
  - Ein Versicherungsunternehmen gilt als solvent, wenn sein **Eigenkapital** (aus ökonomischer Sicht) ein bestimmtes **Risikomass** der Verteilung des Verlust-ergebnisses über einen bestimmten Zeithorizont (d.h. den maximalen Verlust, den das Unternehmen tragen können muss) übersteigt.
- Das Verlangen des Erwartungswertes als Prämie reicht nicht aus, um den Ruin zu vermeiden. Hier sind einige Ansätze, um den **Ruin weniger wahrscheinlich zu** machen:
  - **Begrenzung der Verteilung von Forderungen (Rückversicherung, Ausschluss Extrem-Risiken, Überwälzung von Risiken an Kunden)**
  - Beantragung **erhöhter Prämien** (Überschätzung der Risiken, Sicherheitsmargen)
  - **Erhöhung des Eigenkapitals** / Rekapitalisierung

Erwartungsnutzen-Theorie

Intuition

- Wir haben als Ausgangssituation eine Reihe von möglichen Alternativen in Bezug auf eine Zufallsvariable. Wie wählt man die Alternative?
- Bernoulli hatte die Idee, nicht nur den durch die mathematischen Wahrscheinlichkeiten gegebenen Erwartungswert zu berücksichtigen, sondern auch eine **Funktion des subjektiven Nutzens des Entscheidungsträgers** u(x) bei der Wahl der Alternative.
- In Bernoullis Worten: "Die Bestimmung des **Wertes einer** Sache sollte nicht auf ihrem Preis beruhen, sondern auf dem **Nutzen,** den sie bringt [...] Sicherlich ist ein Gewinn von 1000 Dukaten für einen Bettler **bedeutender** als für einen reichen Mann, auch wenn sie den gleichen Betrag erhalten".
- Für einen risikoaversen Entscheidungsträger ist die Nutzenfunktion immer **konkav** ($u'>0$ und $u''<0$): eine kleine Erhöhung mit einem großen x bedeutet also weniger Nutzen als eine Erhöhung mit einem kleinen x



Schätzung der eigenen Nutzenfunktion

Definition (Bernoulli-Prinzip)

Das Entscheidungsprinzip mit der Zielfunktion

$$\boxed{\max_{i=1,\ldots,n} \mathbb{E}[u(X_i)]}$$

heißt Bernoulli-Prinzip. Dabei bezeichnet $\mathbb{E}[u(X_i)]$ den erwarteten Nutzen der zur Alternative $a_i \in A$ gehörenden Zufallsvariablen X_i.

- Der Entscheidungsträger wird die Alternative wählen, die seinen erwarteten Nutzen maximiert.
- Die Nutzenfunktion ist **wirklich subjektiv** und hängt vom eigenen Vermögen, der Höhe des Einsatzes und den bisherigen Erfahrungen ab...

Existenz einer Versicherung

- Durch die Kombination dieser 3 Theorien ist es möglich, zu bestimmen (und zu quantifizieren), **in welchen Situationen ein Versicherungsvertrag zustande kommen kann**:
- Um einen sicheren Ruin zu vermeiden, benötigt der Versicherer eine Prämie π mit der Eigenschaft

$$\pi > \mathbb{E}[X]$$

- Der Versicherte (risikoavers) hingegen wird höchstens eine Prämie π akzeptieren, so dass

$$\mathbb{E}[u(v_0 - X)] < u(v_0 - \pi)$$

- Der Versicherungsvertrag wird gegen eine Prämie π abgeschlossen, die zwischen

$$J = \left(\mathbb{E}[X], v_0 - u^{-1}\left(\mathbb{E}[u(v_0 - X)]\right)\right)$$

liegt

- **Je größer die Risikoaversion der** Versicherten ist (Konkavität von u(x)), desto größer kann die Erhöhung (Sicherheitsmarge/Unternehmensgewinn) im Vergleich zum Erwartungswert sein.