ETH zürich

Neue Lehrmittel: Mathematik fürs Gymnasium

24. STMU, 15. September 2021, NKSA Aarau

Armin P. Barth

ETH zürich

Inhalt von Band I

Inhalte von Band II - IV

Band II:

- Potenzen mit reellen Exponenten
- Exponentialfunktion
- Logarithmen
- Zentrische Streckung, Strahlensätze und Ähnlichkeit
- Trigonometrie
- Folgen und Reihen

Band III:

- Grenzwerte von Folgen, Reihen und Funktionen (inkl. Stetigkeit)
- Differentialrechnung
- Vektorgeometrie

Band IV:

- Integralrechnung
- Stochastik
- Einblicke in die Höhere Mathematik

ETH zürich

Alleinstellungsmerkmale

→ Konsequente Umsetzung der Erkenntnisse der modernen Lehr- und Lernforschung

→ Betonung auf Konzeptverständnis

→ Es wird gezeigt, wie mathematische Erkenntnisse *entstehen*. (Entdeckungsprozesse, Argumente, Herleitungen, …)

Die 5 Phasen jedes Kapitels

Phase 1:
Selber erforschen / kognitive Aktivierung

Phase 2:
Lehrtext

Phase 3:
Wissenssicherung (Selbsterklärungsaufgaben, Sicherung des Konzeptverständnisses)

Phase 4:
Üben und Anwenden (inkl. Knacknüsse, diverse Ausflüge)

Phase 5:
Metakognitionsfragen (Lernziele), Zusammenfassung, Nachtest

Beispiel zu Phase 1: Selber erforschen

- Aufgabe 1

Was für ganz praktische Gründe könnten dafür verantwortlich gewesen sein, dass die Menschen negative Zahlen eingeführt haben? Wofür wurden und werden sie mit Vorteil verwendet?

- Aufgabe 2

Können Sie drei verschiedene Gleichungen angeben, die man in natürlichen Zahlen nicht lösen kann?

- Aufgabe 3

Welche Zahl ist ebenso viel kleiner als $\frac{4}{5}$ wie sie grösser als $\frac{2}{3}$ ist?

Beispiel zu Phase 1: Selber erforschen

- Aufgabe 4

Gegeben seien die beiden rationalen Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$. *Rational* wird jede Zahl genannt, die sich in der Form $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q schreiben lässt, wobei der Nenner natürlich nicht 0 sein darf.

a) Können Sie eine neue rationale Zahl finden, die zwischen den beiden genannten Zahlen liegt?

b) Wie viele rationale Zahlen gibt es wohl insgesamt zwischen den beiden genannten Zahlen? Und wie kann man einige davon konkret angeben?

c) Was kann man ganz allgemein darüber sagen, wie viele rationale Zahlen zwischen irgend zwei beliebigen (voneinander verschiedenen) Zahlen gefunden werden können?

d) Welches ist die nächstgrössere rationale Zahl nach $\frac{1}{3}$?

Beispiel zu Phase 2: Lesetexte

- Ausführliche Lesetexte, die Wert auf die Entstehungsprozesse aller Erkenntnisse legen
- Detaillierte Erklärungen, Herleitungen, Beweise
- Definitionen
- «Merkes»
- Sätze
- Illustrationen, mental tools
- Ideale Lern-Grundlage

Beispiel zu Phase 3: Selber erklären

- Aufgabe 1

Können Sie gut erklären, was man unter der Menge der ganzen Zahlen versteht? Und zwei Gleichungen angeben, nämlich eine erste, die in der Menge der ganzen Zahlen lösbar ist und eine zweite, die das nicht ist?

- Aufgabe 2

Jemand definiert recht ungenau: *Eine rationale Zahl ist ein Bruch*. Wie muss man diese Formulierung ergänzen oder präzisieren?

- Aufgabe 3

Es seien M, N und P drei Mengen. Wir wissen, dass $M \subset N$ und dass $N \subset P$ gilt. Können Sie gut begründen, weshalb dann auch $M \subset P$ gelten muss?

Beispiel zu Phase 3: Selber erklären

Aufgabe 4
Hier sehen Sie einige Zahlen und einige Mengen. Bitte setzen Sie immer dann ein Kreuz, wenn eine Zahl Element einer Menge ist. Die erste Zeile ist bereits ausgefüllt.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
-3		X	X
57			
$\frac{8}{9}$			
4.12			
π			

Willy behauptet nun: Immer, wenn man irgendwo ein Kreuz gesetzt hat, sind bestimmt rechts davon in derselben Zeile auch Kreuze. Trifft das zu? Begründen Sie.

Beispiel zu Phase 3: Schüttelbeweis

$$12n^2 = m^2$$

Angenommen, $\sqrt{12}$ wäre rational.

Auf der linken Seite dagegen kommt der Primfaktor 3 insgesamt in ungerader Anzahl vor, nämlich in gerader Anzahl in der Quadratzahl n^2 und dann noch einmal mehr.

Folglich muss die Annahme falsch gewesen sein; $\sqrt{12}$ ist also nicht rational und somit irrational.

Durch Primfaktorzerlegung der Zahl 12 könnte man das wie folgt umschreiben:

Durch Multiplikation mit *n* und Quadratur würde dann aus der Gleichung

$\frac{m}{n} = \sqrt{12}$ dies folgen:

$$2^2 \cdot 3 \cdot n^2 = m^2$$

Beweis:

Auf der rechten Seite (m^2) kommt der Primfaktor 3 sicherlich in gerader Anzahl vor, weil m^2 eine Quadratzahl ist.

$\square$

Dann müsste sich $\sqrt{12}$ in der Form $\frac{m}{n}$ schreiben lassen für zwei natürliche Zahlen *m* und *n* und $n \neq 0$.

Das ist ein Widerspruch, denn dieselbe Zahl kann nicht zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen haben.

Beispiel zu Phase 3: Lücken füllen

Bitte tragen Sie in jedem Kästchen die korrekte, dort passende Zahl ein:

a) $\sqrt{\square} = 4$, weil $\square^2 = \square$

b) $\sqrt{121} = \square$, weil $\square^2 = \square$

c) $\sqrt{\square} = \square$, weil $9^2 = \square$

d) $\sqrt{\square} = \square$, weil $\square^2 = 0.01$

e) $\sqrt{9} + \sqrt{25} = \sqrt{\square}$

usw.

Beispiel zu Phase 3: Wahr oder falsch?

Können Sie bei jeder dieser Behauptungen entscheiden, ob sie wahr oder falsch ist? Und Ihren Entscheid jeweils gut begründen?

a) Für jede nicht-negative Zahl *a* gilt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
b) Für jede nicht-negative Zahl *a* gilt: $\sqrt{a^2} = a$
c) Für jede reelle Zahl *a* gilt: $\sqrt{a^2} = a$
d) Die Zahlen 10 und –10 bilden zusammen die Quadratwurzel von 100.
e) $\sqrt{225 \cdot 81} = \sqrt{225} \cdot \sqrt{81} = 15 \cdot 9 = 135$
f) $\sqrt{625 - 49} = \sqrt{625} - \sqrt{49} = 25 - 7 = 18$
g) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

u.s.w.

Beispiel zu Phase 4: Üben und anwenden

Ganz viele «klassische» Übungs- und Anwendungsaufgaben…

Beispiel zu Phase 4: Knacknüsse

- Aufgabe 1

Stellen Sie sich ein unendlich grosses Schachbrett vor, also ein Schachbrett mit unendlich vielen Feldern, das sich auf alle vier Seiten unendlich weit ausdehnt. Nun erfahren Sie drei Dinge über dieses Brett: Erstens: Irgendjemand hat auf jedem Feld dieses Brettes eine natürliche Zahl notiert. Zweitens: Es gilt für jedes Feld, dass die darauf notierte Zahl gerade der Durchschnitt der vier Zahlen auf den vier benachbarten Feldern ist. Drittens: Es gibt ein Feld, auf dem die Zahl 8 steht.

Was können Sie aus diesen Angaben über die Zahlen auf dem Brett schliessen? Und können Sie Ihre Behauptung auch beweisen?

- Aufgabe 2

Auf einem Tisch liegen 9 Münzen, 5 zeigen „Kopf“, und 4 zeigen „Zahl“. Sie werden eingeladen, an dem folgenden Spiel teilzunehmen: Ein Spielzug besteht in dem gleichzeitigen Umdrehen von genau zwei Münzen nach Ihrer Wahl. Sie dürfen so viele Spielzüge machen, wie Sie wollen, am Ende sollen aber alle Münzen „Kopf“ zeigen. Können Sie das Ziel erreichen?

Beispiel zu Phase 4: «Mathemagie»

Möchten Sie Bekannte oder Verwandte mit einem Zaubertrick verblüffen? Mit dem folgenden Trick dürfte Ihnen das vielleicht gelingen: Sie basteln sich die abgebildeten fünf Karten und legen diese auf dem Tisch vor der Person, die Sie überraschen möchten, aus.

Karte 0

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

Karte 1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

Karte 2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

Karte 3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

Karte 4

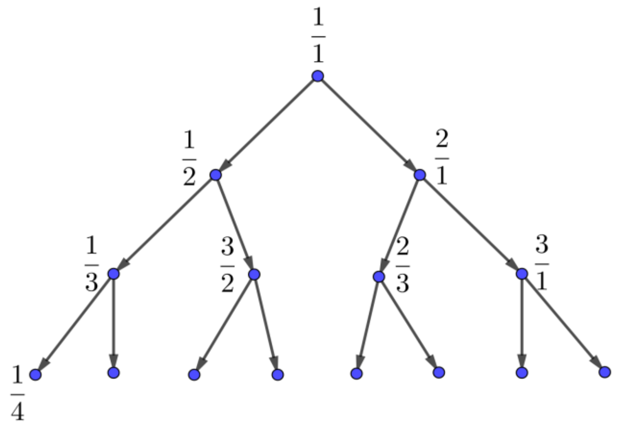
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

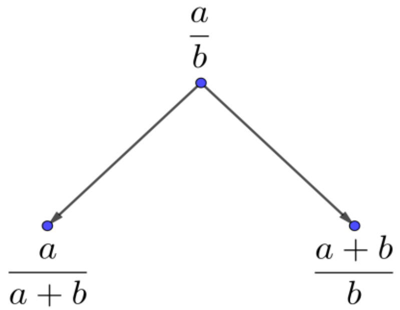
Nun behaupten Sie theatralisch, Sie könnten erraten, an welchem Tag des Monats die Person Geburtstag hat. Dazu muss die Person Ihnen lediglich alle Karten zeigen, auf denen dieser Tag verzeichnet ist. Wäre der Geburtstag zum Beispiel am 14. eines Monats, so müsste Ihnen die Person lediglich die Karten 1, 2 und 3 zeigen, und schon könnten Sie daraus den Tag berechnen. Im Gegensatz zu den meisten Zaubertricks sind wir hier in der Lage, den Trick genau zu verstehen. Wie funktioniert er denn?

Beispiel zu Phase 4: Ausflüge

Ausflüge zu:

- Im Jahr 2006 publizierte Filip Saidak in der Zeitschrift *American Mathematical Monthly* einen ganz neuen Beweis der Tatsache, dass es unendlich viele Primzahlen gibt …
- Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit
- Im Jahr 2000 beschrieben die beiden Mathematiker Neil Calkin und Herbert Wilf in einer ihrer Publikationen einen ganz besonderen «Baum», den sogenannten *Calkin-Wilf-Tree*.





Beispiel zu Phase 4: Ausflüge

Ausflüge zu:

- Josephus-Problem
- Beweise ohne Worte
- Secret Sharing
- Computer-Tomographie
- Eine 2019 wieder entdeckte Lösungsmethode für quadratische Gleichungen
- Origami-Mathematik
- Goldener Schnitt
- Polynomgleichungen 3. und höheren Grades
- Hat jede Funktion eine Funktionsgleichung?
- Modellbildung
- Geschichte der Mathematik
- Laplace-Dämon
- …

Beispiel zu Phase 5: Metakognitionsfragen

Aufgabe 1

Fühle ich mich sicher im Umgang mit der Quadratwurzel? Kenne ich insbesondere die Wurzelgesetze? Und könnte ich den folgenden Satzanfang zu einer sauberen Definition der Quadratwurzel vervollständigen? «Unter der Quadratwurzel einer nicht-negativen reellen Zahl a versteht man …»

Aufgabe 2

Sei a eine nicht-negative reelle Zahl. Ist mir der Unterschied zwischen den beiden folgenden Fragen bewusst? Kann ich für ein konkretes Beispiel für a beide Fragen beantworten?

Frage 1: Was ist die Quadratwurzel von a?

Frage 2: Welche Lösungen hat die Gleichung $x^2 = a$ in der Grundmenge der reellen Zahlen?

Aufgabe 3

Habe ich gut verstanden, wie der Algorithmus von Heron abläuft und warum er immer bessere Näherungswerte für eine gesuchte Quadratwurzel produziert?

Beispiel zu Phase 5:

Zusammenfassungen der Inhalte

Nachtest

ETH zürich

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!
Fragen / Bemerkungen?