Plädoyer für Zahlenfolgen

Vortrag am Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht

15. September 2021, Beat Jaggi

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik ist ...

Mathematik ist ...

> **Mathematik ist die Grammatik der Zahlen.**
>
> Hans Lohberger, Schriftsteller (1920 bis 1979)

Mathematik ist ...

> **Mathematik ist die Musik der Vernunft.**
>
> James Joseph Sylvester, Mathematiker (1814 bis 1897)

Mathematik ist ...

> **Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.**
>
> Galileo Galilei, Physiker und Astronom (1564 bis 1642)

Mathematik ist ...

> **Mathematik ist ein geistreicher Luxus.**
>
> Friedrich der Grosse (1740 bis 1786)

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft

> **In der Mathematik sind die Dinge in ganz besonderer Weise gewiss.**

Thomas Jahnke, Mathematiker und Mathematikdidaktiker

Was ist ein Beweis?

Saunders Mac Lane: Ein Beweis ist das Ableiten streng formulierter Sätze aus vorgegebenen Axiomen.

Imre Lakatos: Ein Beweis ist ein sozialer Akt.

Siehe 'Erich Ch. Wittmann: Wann ist ein Beweis ein Beweis?'

Mathematik ist eine anwendbare Wissenschaft

Optimieren: Extremalprobleme (Differentialrechnung),
Lineare Optimierung, ...

Prognostizieren: Differentialgleichungen,
Wahrscheinlichkeitsrechnung,
Folgen und Reihen, ...

Mathematik ist ...

> **Mathematik ist die Kunst, Muster zu erkennen.**
>
> Ian Stewart , Mathematiker (1945 bis)

Eugen Jost, "You know my name"

Mathematik ist ...

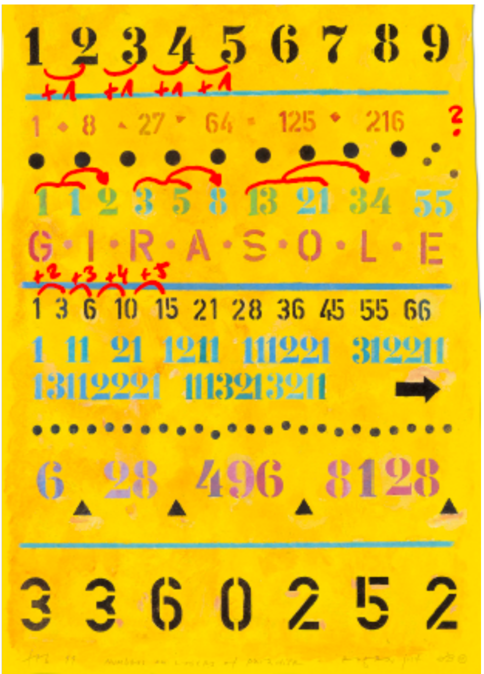
Mathematik ist die Kunst, Muster zu erkennen

und zu beschreiben!

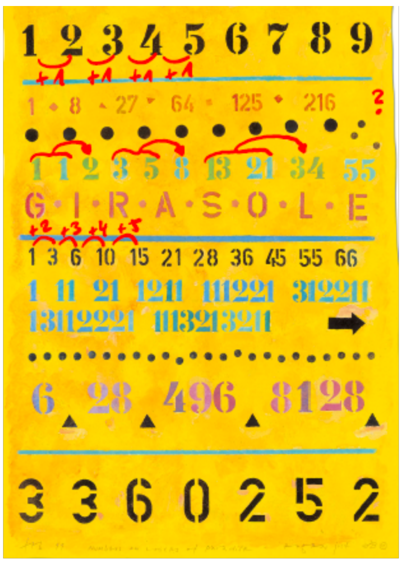
Zahlenfolgen (mathematisch) beschreiben

Die n-te Zahl einer Zahlenfolge bezeichnen wir mit

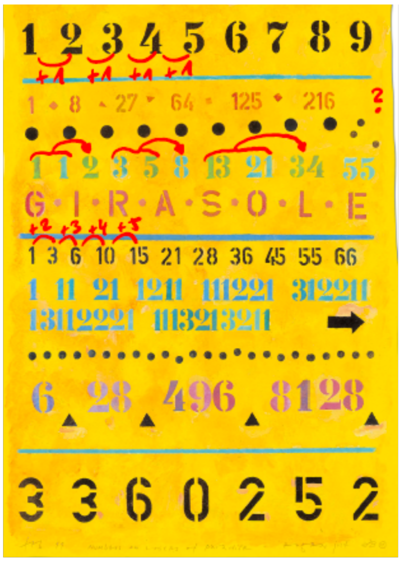
$$\mathbf{a_n}$$



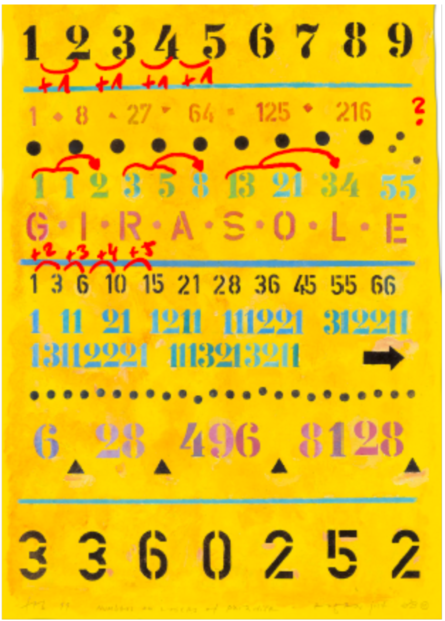
$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 1 \\
a_3 &= a_2 + 1 \\
a_4 &= a_3 + 1 \\
a_5 &= a_4 + 1 \\
\vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
a_n &= a_{n-1} + 1
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 2 \\
a_3 &= 3 \\
a_4 &= 4 \\
\vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
a_n &= n
\end{aligned}
$$

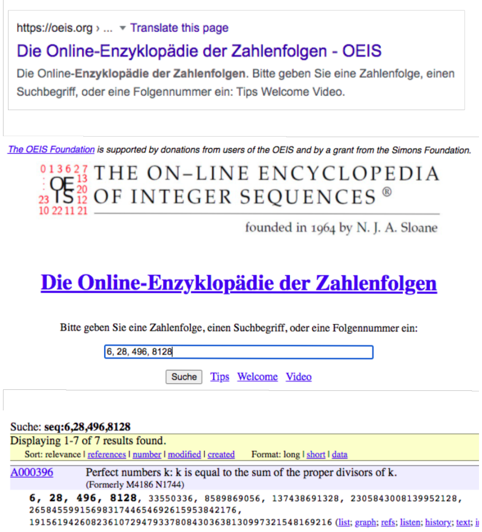


$$
\begin{array}{rcl}
f_3 & = & f_2 + f_1 \\
f_4 & = & f_3 + f_2 \\
f_5 & = & f_4 + f_3 \\
f_6 & = & f_5 + f_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f_n & = & f_{n-1} + f_{n-2}
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{rcl}
a_2 & = & a_1 + 2 \\
a_3 & = & a_2 + 3 \\
a_4 & = & a_3 + 4 \\
a_5 & = & a_4 + 5 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_n & = & a_{n-1} + n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
a_1 & = & 1 \\
a_2 & = & 8 \\
a_3 & = & 27 \\
a_4 & = & 64 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_n & = & ??
\end{array}
$$


https://oeis.org › ... ▾ Translate this page

Die Online-Enzyklopädie der Zahlenfolgen - OEIS

Die Online-**Enzyklopädie der Zahlenfolgen**. Bitte geben Sie eine Zahlenfolge, einen Suchbegriff, oder eine Folgennummer ein: Tips Welcome Video.

The OEIS Foundation is supported by donations from users of the OEIS and by a grant from the Simons Foundation.

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Die Online-Enzyklopädie der Zahlenfolgen

Bitte geben Sie eine Zahlenfolge, einen Suchbegriff, oder eine Folgennummer ein:

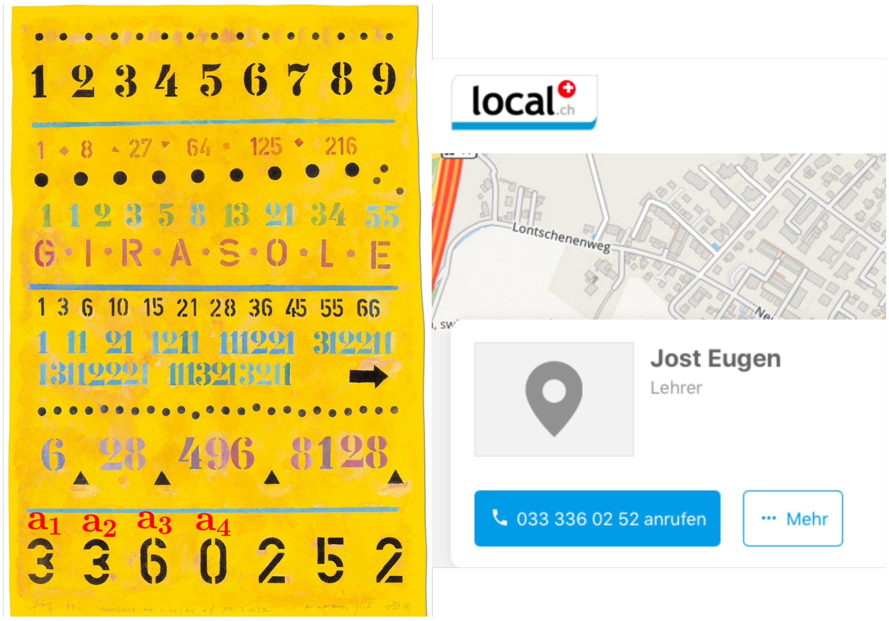
6, 28, 496, 8128

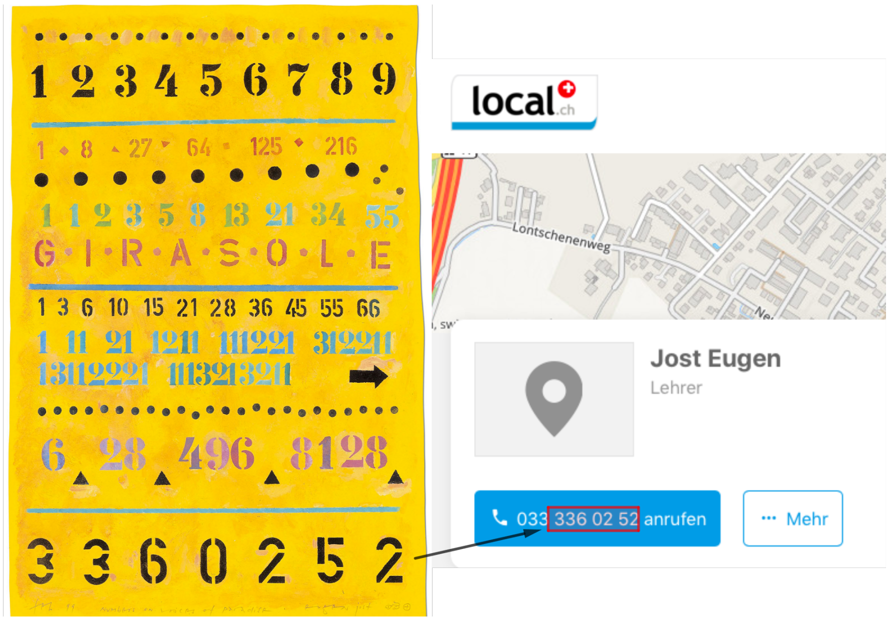
Suche | Tips | Welcome | Video

Suche: **seq:6,28,496,8128**
Displaying 1-7 of 7 results found.
Sort: relevance | references | number | modified | created   Format: long | short | data

A000396   Perfect numbers k: k is equal to the sum of the proper divisors of k.
(Formerly M4186 N1744)

6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, 2658455991569831744654692615953842176, 191561942608236107294793378084303638130997321548169216 (list; graph; refs; listen; history; text; i


1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 8 27 64 125 216
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55
G I R A S O L E
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66
1 11 21 1211 111221 312211
13112221 1113213211
6 28 496 8128
a_1 a_2 a_3 a_4
3 3 6 0 2 5 2
local.ch
Lontschenenweg
Jost Eugen
Lehrer
033 336 02 52 anrufen
Mehr


1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 8 27 64 125 216
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55
G I R A S O L E
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66
1 11 21 1211 111221 312211
13112221 1113213211
6 28 496 8128
3 3 6 0 2 5 2
local.ch
Lontschenenweg
Jost Eugen
Lehrer
033 336 02 52 anrufen
Mehr

2 Drei einfache Typen von Zahlenfolgen (Exkurs: Mittelwerte)

Einfache Typen von Zahlenfolgen

Arithmetische Zahlenfolgen

Die Folgenglieder $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ resp. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ einer arithmetischen Zahlenfolge erfüllen die Rekursionsvorschrift

$$\mathbf{a_{n+1}} = \mathbf{a_n} + \mathbf{d} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{resp. } n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

für eine feste reelle Zahl d.

Ist a_0 resp. a_1 vorgegeben, so bekommt man

$$\begin{array}{ccc}
a_0 & \text{resp.} & a_1 \\
a_1 = a_0 + d = a_0 + 1d & \text{resp.} & a_2 = a_1 + d = a_1 + 1d \\
a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d & \text{resp.} & a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\
a_3 = a_2 + d = a_0 + 3d & \text{resp.} & a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \\
a_n = a_{n-1} + d = a_0 + nd & \text{resp.} & a_{n+1} = a_n + d = a_1 + nd \\
a_{n+1} = a_0 + (n+1)d & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Die expliziten Beschreibungen von arithmetischen Zahlenfolgen sind

$$\mathbf{a_n} = \mathbf{a_0} + \mathbf{nd} \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{resp.}$$

$$\mathbf{a_n} = \mathbf{a_1} + (\mathbf{n} - \mathbf{1})\mathbf{d} \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Mit $a_n = a_0 + n \cdot d$ gilt $a_n + d = a_0 + n \cdot d + d = a_0 + (n+1) \cdot d = a_{n+1}$.

Mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ gilt $a_n + d = a_1 + (n-1) \cdot d + d = a_1 + n \cdot d = a_{n+1}$.

In beiden Fällen ist die Rekursionsvorschrift erfüllt.

Geometrische Zahlenfolgen

Die Folgenglieder $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ resp. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ einer geometrischen Zahlenfolge erfüllen die Rekursionsvorschrift

$$\mathbf{a_{n+1} = a_n \cdot q} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{resp. } n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

für eine feste reelle Zahl $q \neq 0$.

Ist a_0 resp. a_1 vorgegeben, so bekommt man

$$\begin{array}{ccc}
a_0 & \text{resp.} & a_1 \\
a_1 = a_0 \cdot q = a_0 \cdot q^1 & \text{resp.} & a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^1 \\
a_2 = a_1 \cdot q = a_0 \cdot q^2 & \text{resp.} & a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
a_3 = a_2 \cdot q = a_0 \cdot q^3 & \text{resp.} & a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \\
a_n = a_{n-1} \cdot q = a_0 \cdot q^n & \text{resp.} & a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^n \\
a_{n+1} = a_n \cdot q = a_0 \cdot q^{n+1} & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Die expliziten Beschreibungen von geometrischen Zahlenfolgen sind also

$$\mathbf{a_n = a_0 \cdot q^n} \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{resp.}$$

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

Mit $a_n = a_0 \cdot q^n$ gilt $a_n \cdot q = a_0 \cdot q^n \cdot q = a_0 \cdot q^{n+1} = a_{n+1}$.

Mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ gilt $a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n = a_{n+1}$.

In beiden Fällen ist die Rekursionsvorschrift erfüllt.

Harmonische Zahlenfolgen

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass sämtliche auftretenden Nenner ungleich 0 sind.

Die Folgenglieder $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ resp. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ einer harmonischen Zahlenfolge erfüllen die Rekursionsvorschrift

$$\mathbf{\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{d} = \frac{d + a_n}{d \cdot a_n}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ resp. } n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

für eine feste reelle Zahl $d \neq 0$.

Ist a_0 resp. a_1 vorgegeben, so bekommt man

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{a_0} & \text{resp.} & \frac{1}{a_1} \\
\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a_0} + 1 \cdot \frac{1}{d} & \text{resp.} & \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a_1} + 1 \cdot \frac{1}{d} \\
\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a_0} + 2 \cdot \frac{1}{d} & \text{resp.} & \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a_1} + 2 \cdot \frac{1}{d} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \frac{1}{d} \\
\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} + n \cdot \frac{1}{d} & \text{resp.} & \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_1} + n \cdot \frac{1}{d} \\
\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_0} + (n+1) \cdot \frac{1}{d} & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Die expliziten Beschreibungen von harmonischen Zahlenfolgen sind also

$$\mathbf{\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0} + n \cdot \frac{1}{d} \Longleftrightarrow a_n = \frac{d \cdot a_0}{d + n \cdot a_0}} \quad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

resp.

$$\mathbf{\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \frac{1}{d} \Longleftrightarrow a_n = \frac{d \cdot a_1}{d + (n-1) \cdot a_1}} \quad (\text{für } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{d} = \ldots \frac{1}{a_{n+1}}$.

$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{d} = \ldots \frac{1}{a_{n+1}}$.

In beiden Fällen ist die Rekursionsvorschrift erfüllt.

Bemerkung: Ist b_n eine arithmetische Folge (mit $b_n \neq 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ resp. $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$), dann ist $\frac{1}{b_n}$ eine harmonische Folge und umgekehrt.

Einfachste Beispiele:

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 1 = n \quad : \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \qquad \text{(arithmetisch)}$$

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad : \quad 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots \qquad \text{(geometrisch)}$$

$$a_n = \frac{1}{1+(n-1)\cdot 1} = \frac{1}{n} \quad : \quad \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots \qquad \text{(harmonisch)}$$

Grundaufgabe: Gesucht ist die explizite Beschreibung einer arithmetischen (geometrischen/harmonischen) Zahlenfolge mit $a_4 = 54$ und $a_7 = 1458$.

Lösung: **Ansatz**: arithmetisch: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen:} \quad a_4 = 54 &= a_1 + 3d \\ a_7 = 1458 &= a_1 + 6d \end{aligned}$$

Gleichungssystem lösen, ...

Gesucht ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_4 = 54$ und $a_7 = 1458$. Ansatz: $a_n = a_0 + nd$ Einsetzen: $a_4 = 54 = a_0 + 4d$ $a_7 = 1458 = a_0 + 7d$ $a_7 - a_4 = 1404 = 3d$ $d = \frac{1404}{3} = 468$ $a_0 = 54 - 4d = -1818$ Die explizite Darstellung der Folge lautet $a_n = -1818 + n \cdot 468 = 468n - 1818$	Gesucht ist eine lineare Funktion, deren Graph durch die beiden Punkte $(4\|54)$ und $(7\|1458)$ geht. Ansatz: $f(x) = mx + q$ Einsetzen: $f(4) = 54 = m \cdot 4 + q$ $f(7) = 1458 = m \cdot 7 + q$ $f(7) - f(4) = 1404 = 3m$ $m = \frac{1404}{3} = 468$ $q = 54 - 4m = -1818$ Die Funktionsvorschrift lautet $f(x) = 468x - 1818$
Gesucht ist eine geometrische Zahlenfolge mit $g_4 = 54$ und $g_7 = 1458$. Ansatz: $g_n = g_0 \cdot q^n$ Einsetzen: $g_4 = 54 = g_0 \cdot q^4$ $g_7 = 1458 = g_0 \cdot q^7$ $\frac{g_7}{g_4} = \frac{1458}{54} = 27 = q^3$ $q = \sqrt[3]{27} = 3$ $g_0 = \frac{g_4}{q^4} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$ Die explizite Darstellung der Folge lautet $g_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}$	Gesucht ist eine Wachstumsfunktion, deren Graph durch die beiden Punkte $(4\|54)$ und $(7\|1458)$ geht. Ansatz: $f(t) = a \cdot b^t$ Einsetzen: $f(4) = 54 = a \cdot b^4$ $f(7) = 1458 = a \cdot b^7$ $\frac{f(7)}{f(4)} = \frac{1458}{54} = 27 = b^3$ $b = \sqrt[3]{27} = 3$ $a = \frac{f(4)}{b^4} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$ Die Funktionsvorschrift lautet $f(t) = \frac{2}{3} \cdot 3^t = 2 \cdot 3^{t-1}$

Zahlenfolgen und Mittelwerte

a und b seien zwei positive reelle Zahlen.

$$\frac{a+b}{2} \quad : \quad \text{arithmetisches Mittel von } a \text{ und } b.$$

$$\sqrt{ab} \quad : \quad \text{geometrisches Mittel von } a \text{ und } b.$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \quad : \quad \text{harmonisches Mittel von } a \text{ und } b.$$

Bei einer arithmetischen Folge ist jedes Folgeglied
(mit Ausnahme des ersten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder.
Analoges gilt für geometrische und harmonische Folgen.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \quad : \quad \frac{3+5}{2} = 4$$

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \quad : \quad \sqrt{4 \cdot 16} = 8$$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \quad : \quad \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{8} = \frac{1}{4}$$

Rekursive Beschreibungen:

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \implies a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \;;\quad n \geq 1$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \implies a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \;;\quad n \geq 1$$

$$a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1}+a_{n+1}} \implies a_{n+1} = \frac{a_{n-1}a_n}{2a_{n-1}-a_n} \;;\quad n \geq 1$$

Explizite Beschreibungen:

$$a_n = a_0 + n(a_1 - a_0) = na_1 - (n-1)a_0$$

$$a_n = a_0 \cdot \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n = \frac{a_1^n}{a_0^{n-1}}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + n\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_0}\right)} = \frac{a_0a_1}{na_0 - (n-1)a_1} = \frac{a_0a_1}{a_1 + n(a_0 - a_1)}$$

a_0 und a_1 sind so zu wählen, dass keine Divisionen durch 0 auftreten.

Definition: Verallgemeinerter Mittelwert

Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$m_1 = \left(\frac{a^1 + b^1}{2}\right)^{\frac{1}{1}} = \frac{a+b}{2}$$

Definition: (Verallgemeinerter Mittelwert)

Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$m_{-1} = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Definition: (Verallgemeinerter Mittelwert)

Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$m_0 = ??$$

$m_0 =??$

Es gilt:

$$\left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = e^{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)}{r}}$$

Auf den Quotienten

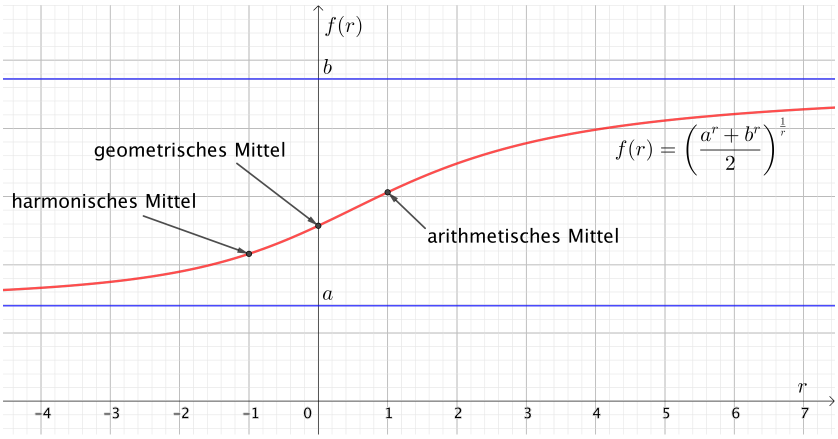
$$\frac{f(r)}{g(r)} = \frac{\ln\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)}{r}$$

lässt sich die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital anwenden, also gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{f(r)}{g(r)} = \lim_{r\to 0}\frac{f'(r)}{g'(r)} &= \lim_{r\to 0}\frac{\frac{a^r\cdot\ln a + b^r\cdot\ln b}{a^r+b^r}}{1} = \frac{\ln a+\ln b}{2}\\ &= \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln(ab)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{ab}\end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$



$$a_n = \left(\frac{a_{n-1}^r + a_{n+1}^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Rekursive Beschreibung:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = \left(2a_n^r - a_{n-1}^r\right)^{\frac{1}{r}}}$$

Explizite Beschreibung:

$$\boldsymbol{a_n = \left[na_1^r - (n-1)a_0^r\right]^{\frac{1}{r}} = \left[a_0^r + n\left(a_1^r - a_0^r\right)\right]^{\frac{1}{r}}}$$

a_0 und a_1 sind so zu wählen, dass keine Divisionen durch 0 auftreten.

Definition: Eine "ziemlich" allgemeine Funktion

Zu zwei (positiven) reellen Zahlen a_0 und a_1 setzen wir

$$\boldsymbol{f_r(x) = \left[a_0^r + {\color{red}x}\left(a_1^r - a_0^r\right)\right]^{\frac{1}{r}} \quad ; \qquad r\in\mathbf{R}}$$

Bemerkung: Die Definitionsmenge der Funktion f_r hängt von r und von der Wahl von a_0 und a_1 ab.

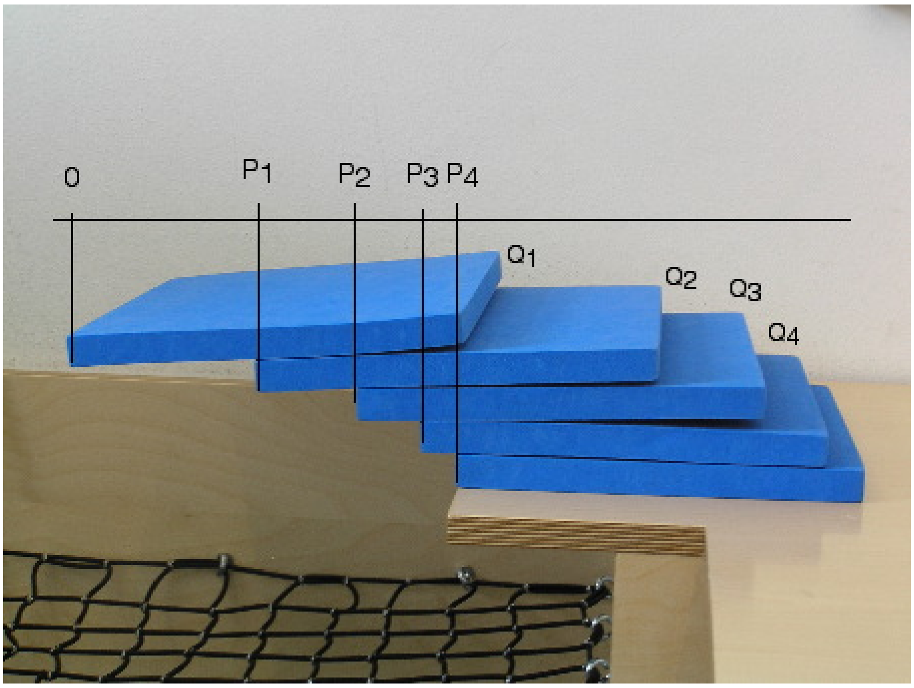
$$\boldsymbol{f_r(x) \quad = \quad \left[a_0^r + x\left(a_1^r - a_0^r\right)\right]^{\frac{1}{r}} \quad ; \qquad r \in \mathbb{R}}$$

Funktion(styp)	r	a_0	a_1	**Funktionsgleichung**
Potenzfunktionen	> 0	0	1	$f_{1/r}(x) = x^r$
Wurzelfunktionen	$n \in \mathbb{N}$	0	1	$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$
Quadratwurzelfunktion	2	0	1	$f_2(x) = \sqrt{x}$
Exponentialfunktionen[1]	0	a	$a \cdot b$	$f_0(x) = a \cdot b^x$
Affine Funktionen	1	q	$m + q$	$f_1(x) = mx + q$
	-1	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{m+q}$	$f_{-1}(x) = \frac{1}{mx+q}$
	-1	1	$\frac{1}{2}$	$f_{-1}(x-1) = \frac{1}{x}$

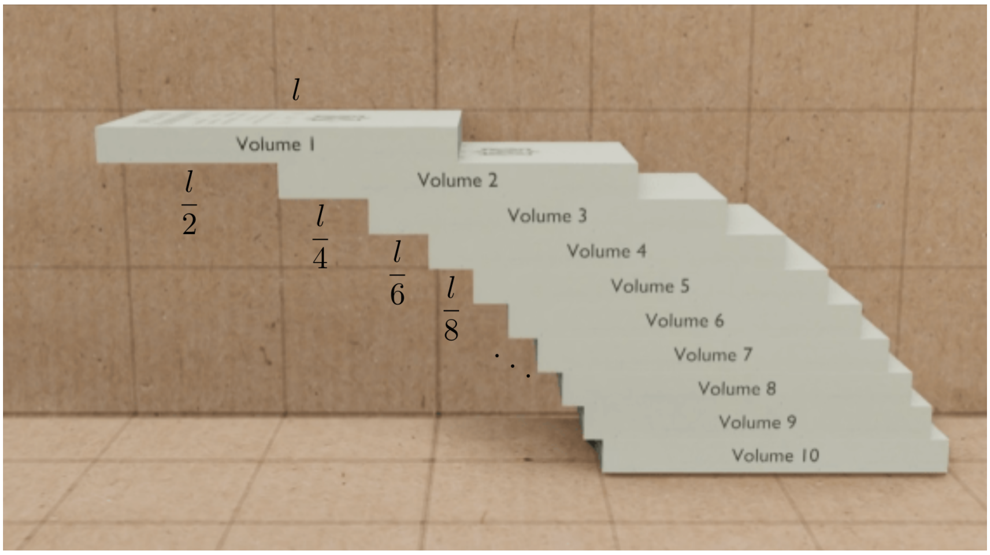
2.1 Arithmetische, geometrische und harmonische Folgen tauchen auf bei ...

Arithmetische, geometrische und harmonische Folgen tauchen auf bei ...

Die "Brücke"



Behauptung: Die Strecken OP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... bilden eine harmonische Zahlenfolge.



Perspektivisches Sehen

ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 93–02
März 1993

Perspektive und Axonometrie

P. Gallin, Wetzikon
H. Keller, Bülach
H. Stocker, Zürich

Eidgenössische Technische Hochschule
CH–8092 Zürich

ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

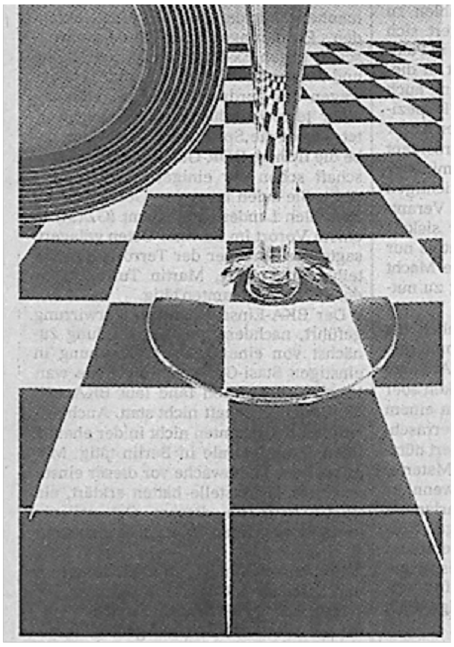
Bericht No. 93–02
März 1993

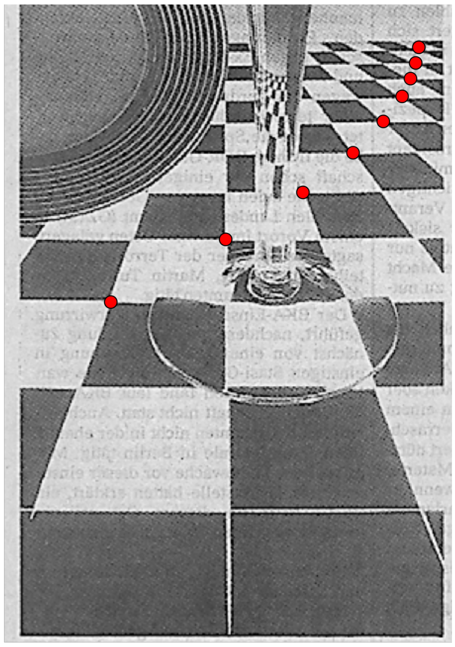
Perspektive und Axonometrie

P. Gallin, Wetzikon
H. Keller, Bülach
H. Stocker, Zürich

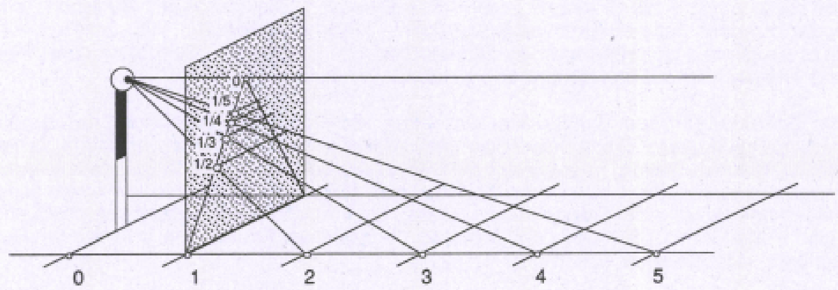
diesen Zeiten gibt es viel interessantes Bildmaterial. Unbewusste Fehler in alten Darstellungen und sogar in Lehrbüchern zur Perspektive können sehr reizvoll sein, weil sie die Schwierigkeiten bei der Suche nach einer korrekten Theorie sehr deutlich nachvollziehen lassen (Tiefenstaffelung bei Schachbrettböden, Fluchtpunkte ausserhalb des Horizonts, Kugeldarstellungen, Bilder mit mehreren Horizonten usw.). Nicht zuletzt

Eidgenössische Technische Hochschule
CH–8092 Zürich



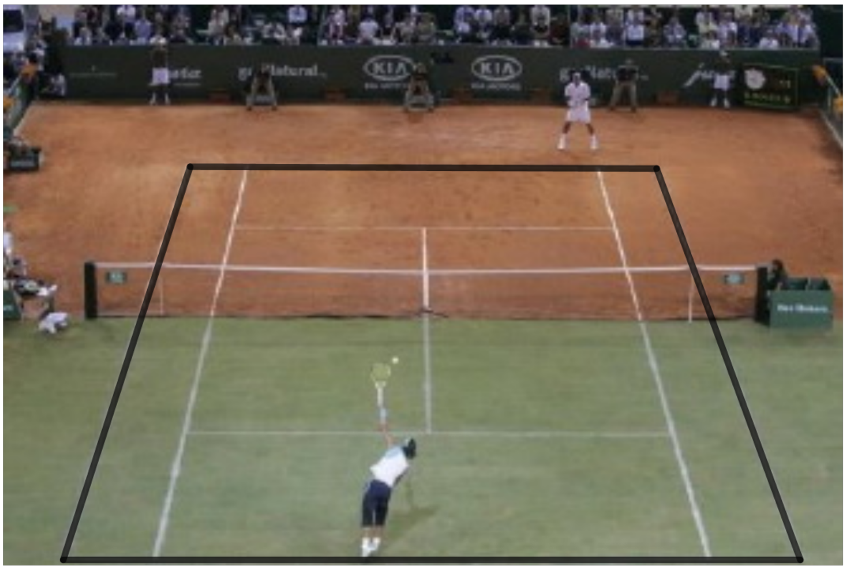


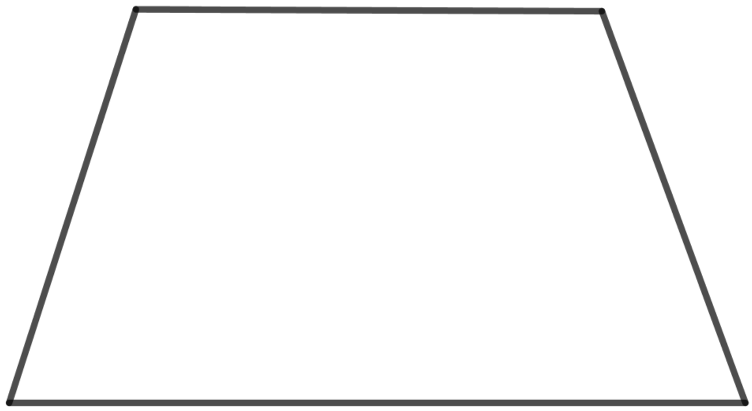
In der folgenden Skizze kommt die Kernidee der perspektivischen Verkürzung zum Ausdruck: Das Auge verwandelt eine arithmetische Progression (z. B. Schienenschwellen) in eine harmonische Progression auf der Bildebene.



Quelle: P. Gallin, H. Keller, H. Stocker: Perspektive und Axonometrie

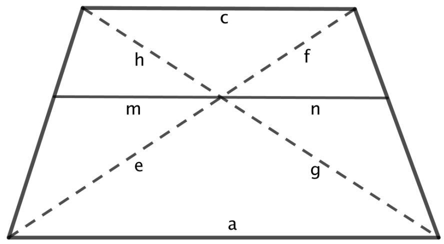

KIA
KIA

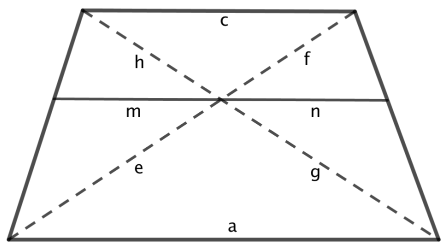

KIA
KIA



Schaut man sich im Fernsehen ein Tennisspiel an, dann sieht man das rechteckige Spielfeld als Trapez.

Das Netz teilt den Tennisplatz in zwei gleiche Hälften. Die Netzunterkante geht dabei durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes (resp. des Rechtecks).

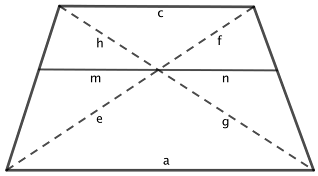




Mit den Bezeichnungen von oben und den Strahlensätzen gilt:

$$\frac{c}{m} = \frac{e+f}{e} = 1 + \frac{f}{e} = 1 + \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c}{n} = \frac{g+h}{g} = 1 + \frac{h}{g} = 1 + \frac{c}{a}$$

Also ist $\frac{c}{m} = \frac{c}{n}$ und folglich $m = n$.



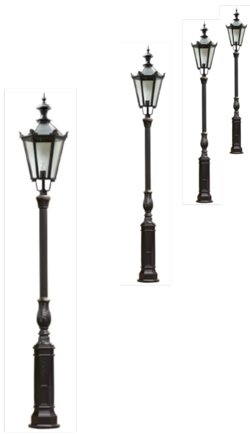
Aus der ersten Gleichung folgt:

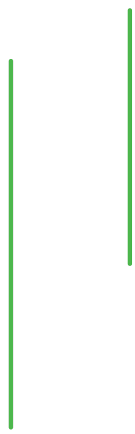
$$\frac{c}{m} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a} \quad \Longrightarrow \quad ac = m(a+c) \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{ac}{a+c}$$

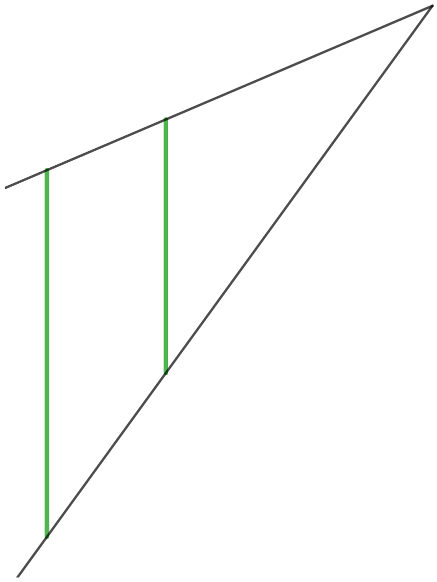
Die gesuchte Länge hängt also nur von a und c ab und beträgt

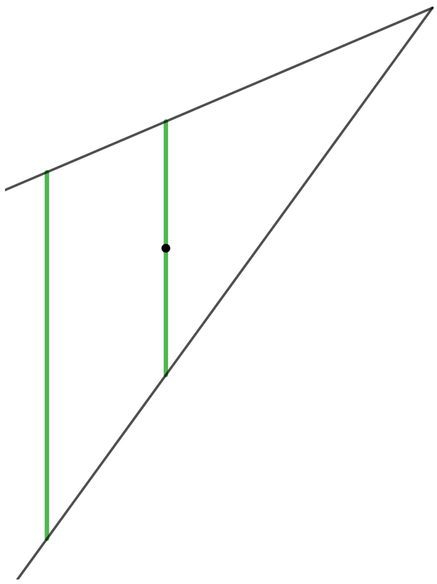
$$m + n = \frac{2ac}{a+c}$$

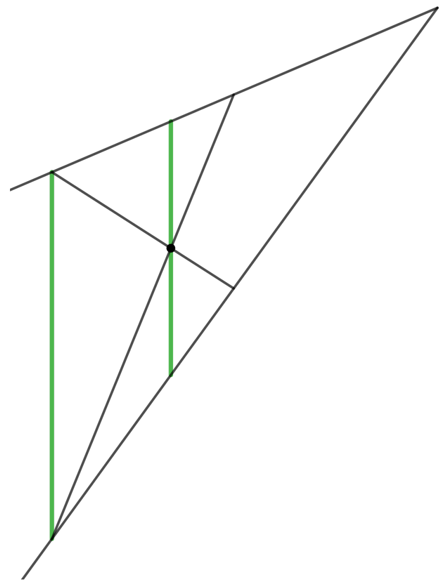
Die Höhen der abgebildeten Strassenlaternen (die in Wirklichkeit gleich hoch und gleich weit voneinander entfernt sind) bilden eine harmonische Zahlenfolge.

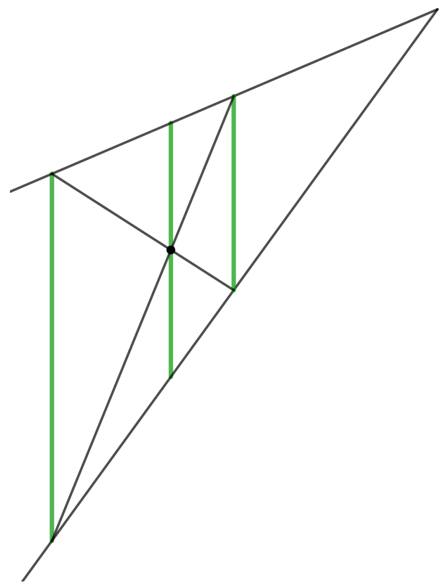


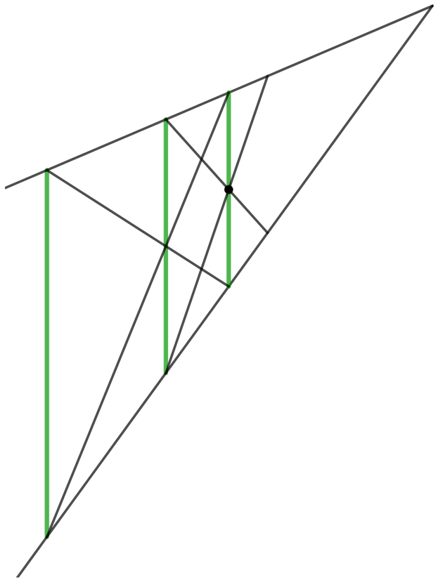


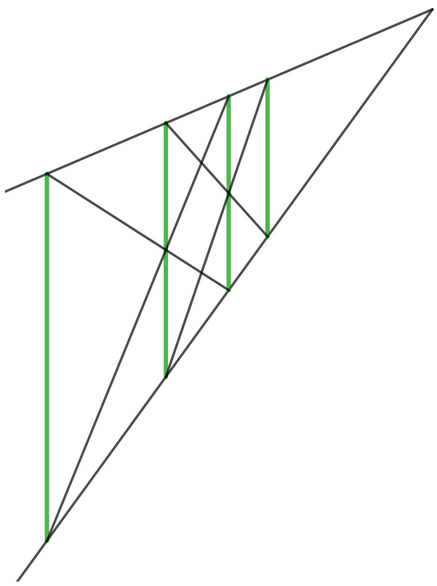


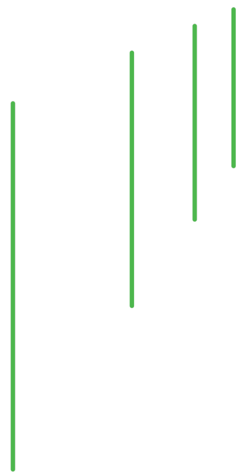












Tonleitern

Die Frequenzen der Töne einer Tonleiter bilden eine Folge.

Grundton a: Frequenz: 440 Hertz.

Eine Oktave höher: Frequenz: 880 Hertz.

Ton	Nr.	Frequenz [Hz]	Frequenz [Hz]	Frequenz [Hz]
a	0	440.0	440.0	440.0
ais	1			
h	2			
c	3			
cis	4			
d	5			
dis	6			
e	7			
f	8			
fis	9			
g	10			
gis	11			
a'	12	880.0	880.0	880.0
		geometrisch	arithmetisch	harmonisch

Die Frequenzen 'unserer' vertrauten Tonleiter bilden eine geometrische Folge!

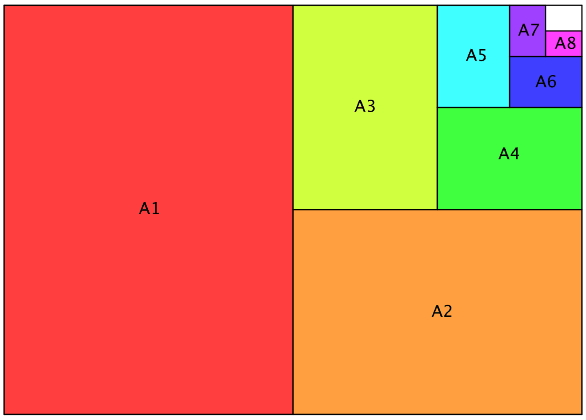
'gleichstufige Stimmung', 'wohltemperierte Stimmung'

Mit dem Ansatz: $f_n = f_0 \cdot q^n = 440 \cdot q^n$ wird $f_{12} = 440 \cdot q^{12} = 880$ und damit $q^{12} = \frac{880}{440} = 2 \implies q = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094$.

Die (exakten) Frequenzen betragen also

$$f_n \approx 440 \cdot 1.059463094^n \ \text{Hz}$$

Papierformate



PAPIERFORMATE DIN 476, VORZUGSREIHE A, BESCHNITTEN

Alle A-Formate haben ein Seitenverhältnis von 1 zu $\sqrt{2}$.

Die Fläche des Formates A_0 beträgt genau 1 m^2.

Die Breiten der Formate A_0, A_1, A_2, ... betragen

$$B_n = \frac{100}{\sqrt{\sqrt{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \mathrm{cm}$$

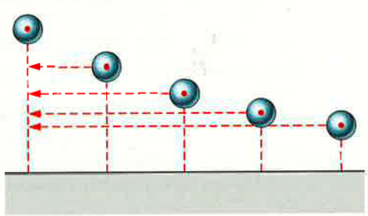
Die Längen der Formate A_0, A_1, A_2, ... betragen

$$L_n = 100 \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \mathrm{cm}$$

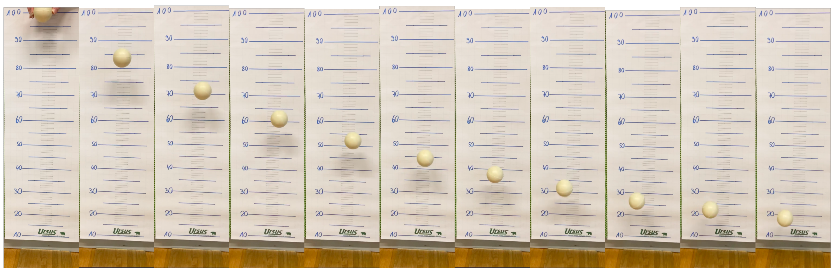
Format	"exakte Breite"	"exakte Länge"	"DIN-Breite"	"DIN-Länge"
A0	84.0896	118.9207	84.1	118.9
A1	59.4604	84.0896	59.4	84.1
A2	42.0448	59.4604	42.0	59.4
A3	29.7302	42.0448	29.7	42.0
A4	21.0224	29.7302	21.0	29.7
A5	14.8651	21.0224	14.8	21.0
A6	10.5112	14.8651	10.5	14.8
A7	7.4325	10.5112	7.4	10.5
A8	5.2556	7.4325	5.2	7.4
A9	3.7163	5.2556	3.7	5.2
A10	2.6278	3.7163	2.6	3.7

Hüpfender Ball

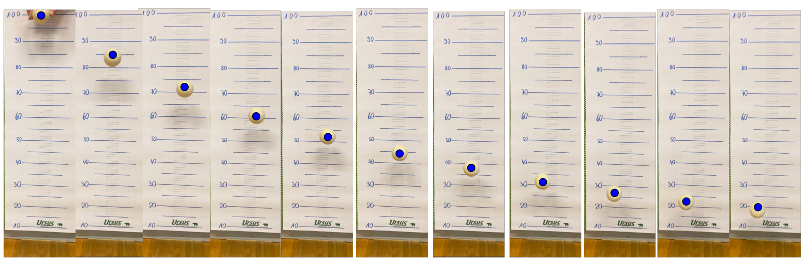
5 Eine Stahlkugel, die aus 1 m Höhe vertikal auf eine Stahlplatte fällt, erreicht nach dem Auftreffen 95 % der vorherigen Höhe (Fig. 2).
a) Welche Höhe erreicht die Kugel nach dem fünften Aufschlag noch?
b) Nach wie vielen Aufschlägen erreicht sie gerade noch die halbe Höhe?
c) Welchen Weg hat die Kugel bis zum fünften Aufschlag zurückgelegt?



Quelle: Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe, 2007



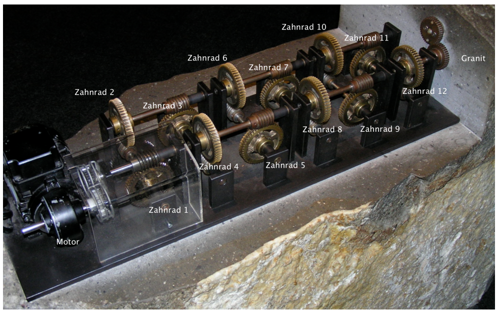
Höhe in cm (Messung)	Quotient
100.0	
84.0	0.840
71.0	0.845
61.5	0.866
52.0	0.846
44.0	0.846
38.0	0.864
32.0	0.842
26.5	0.828
22.5	0.849
18.0	0.800



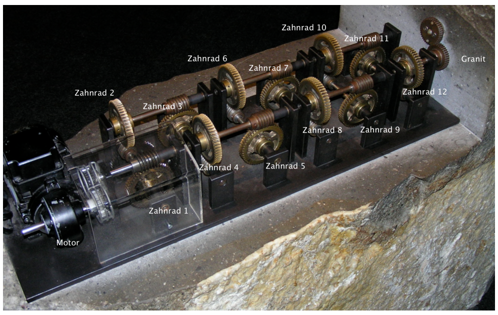
$$h_n \approx 100 \cdot 0.8424^n, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

"Maschine mit Granit" (Arthur Ganson)

Technorama Winterthur



Ein Elektromotor treibt ein mehrstufiges Untersetzungsgetriebe an, dessen letzte Welle fest in einen Granitblock eingelassen ist. Es gibt zwölf Untersetzungsstufen. Jede Stufe besteht aus einer Gewindeschnecke, die auf ein Zahnrad wirkt.
Das Untersetzungsverhältnis beträgt 50:1 pro Stufe.

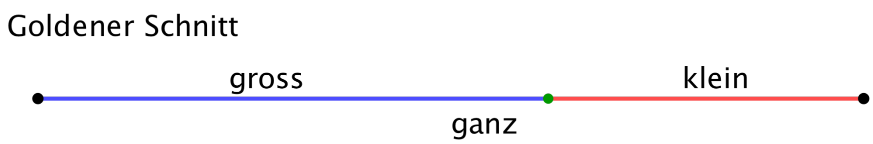


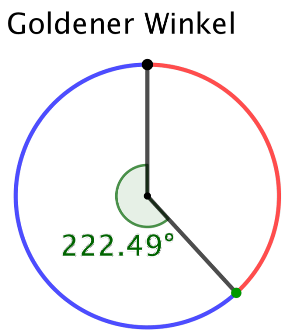
Wie lange wird diese Ewigkeitsmaschine laufen?

Die Antriebswelle dreht mit $U_0 = 200$ Umdrehungen pro Minute.

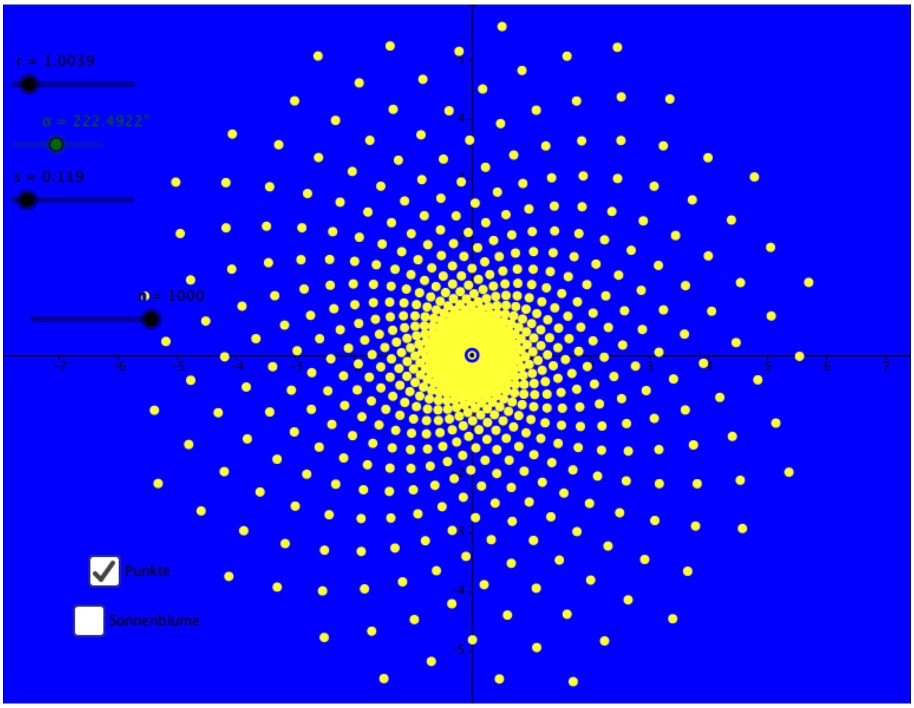
Welle n rotiert mit $U_n = 200 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^n$ Umdrehungen pro Minute.

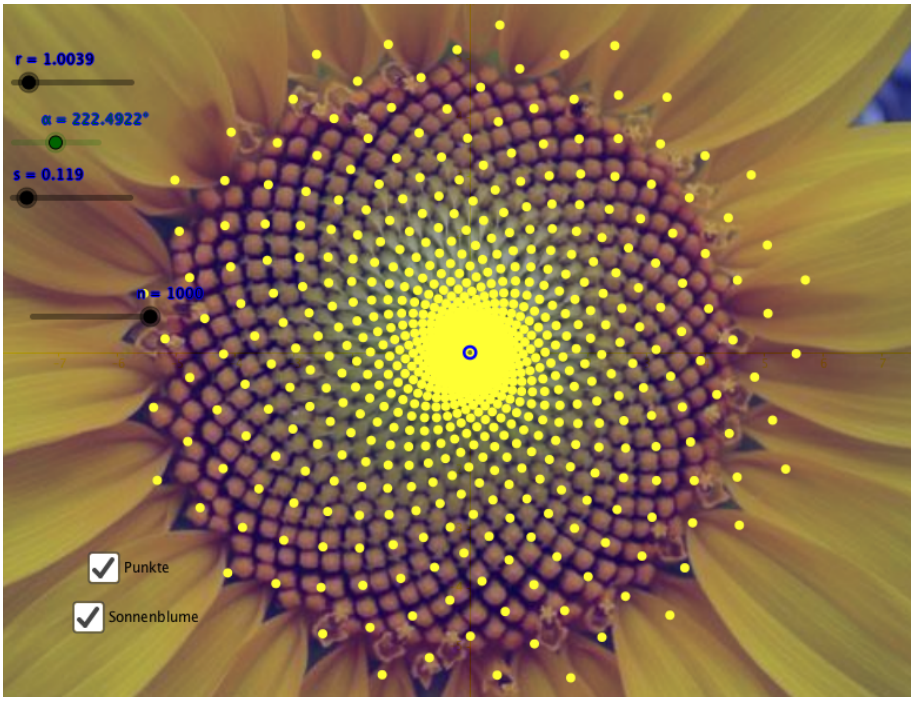
Die Sonnenblume





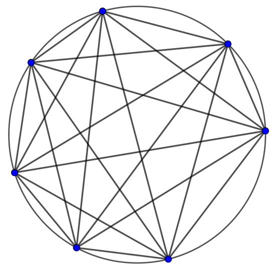
“ $\frac{\text{ganz}}{\text{gross}} = \frac{\text{gross}}{\text{klein}}$ “


r = 1.0039
α = 222.4922°
s = 0.119
n = 1000
Punkte
Sonnenblume

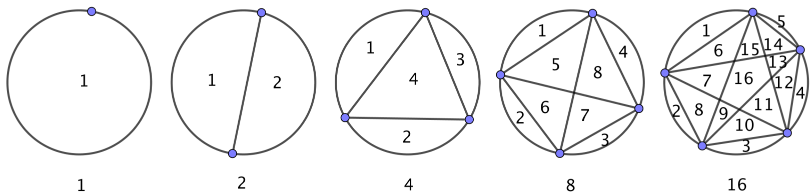

r = 1.0039
α = 222.4922°
s = 0.119
n = 1000
Punkte
Sonnenblume

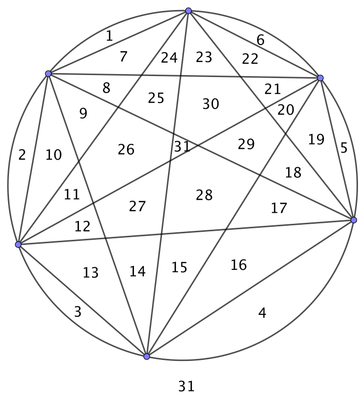
...und schliesslich noch ...

<u>Problem:</u> Auf einer Kreislinie sind n Punkte gegeben, die paarweise durch Sehnen verbunden sind. In wieviele Gebiete wird das Innere des Kreises höchstens geteilt?



<u>Problem:</u> Auf einer Kreislinie sind n Punkte gegeben, die paarweise durch Sehnen verbunden sind. In wieviele Gebiete wird das Innere des Kreises höchstens geteilt?



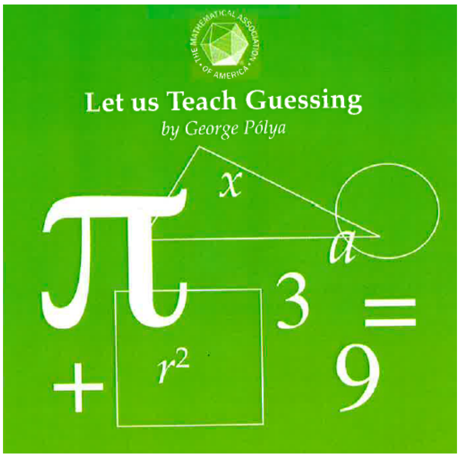


Sind auf einer Kreislinie n Punkte gegeben, die paarweise durch Sehnen verbunden sind, dann wird das Innere des Kreises in höchstens

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

Gebiete geteilt.

Anzahl Punkte	Anzahl Gebiete
1	$\binom{1}{0}+\binom{1}{2}+\binom{1}{4}=1+0+0=1$
2	$\binom{2}{0}+\binom{2}{2}+\binom{2}{4}=1+1+0=2$
3	$\binom{3}{0}+\binom{3}{2}+\binom{3}{4}=1+3+0=4$
4	$\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}=1+6+1=8$
5	$\binom{5}{0}+\binom{5}{2}+\binom{5}{4}=1+10+5=16$
6	$\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}=1+15+15=31$



Quelle: DVD

Satz: n Hyperebenen in allgemeiner Lage zerlegen $\mathbf{R}^k$ in

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{k}$$

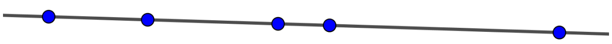
Gebiete.

Spezialfälle:

$k=1$: n verschiedene Punkte zerlegen eine Gerade in

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=n+1$$

Teile.

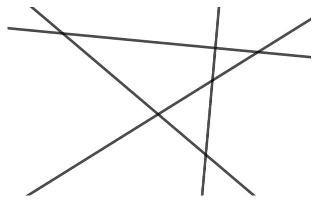


Für 5 Punkte gibt das $5+1=6$ Teile.

$k = 2$: n Geraden in allgemeiner Lage zerlegen die Ebene $\mathbf{R}^2$ in

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Gebiete.



Für 4 Geraden gibt das $\frac{4^2+4+2}{2} = 11$ Gebiete.

$k = 3$: n Ebenen in allgemeiner Lage zerlegen der Raum $\mathbf{R}^3$ in

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

Gebiete.

"Twenty-five = Five times five!"

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$$

3 Teilsummen, figurierte Zahlen

Zu einer gegebenen Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieren wir

$$\mathbf{s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i} \ .$$

s_n heisst **n-te Teilsumme** der Folge a_n.

Die Teilsummen $s_1, s_2, s_3, \ \ldots$ bilden selber wieder eine Folge.

<u>Für eine arithmetische Folge</u> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \ \ (n = 1, 2, \ldots)$:

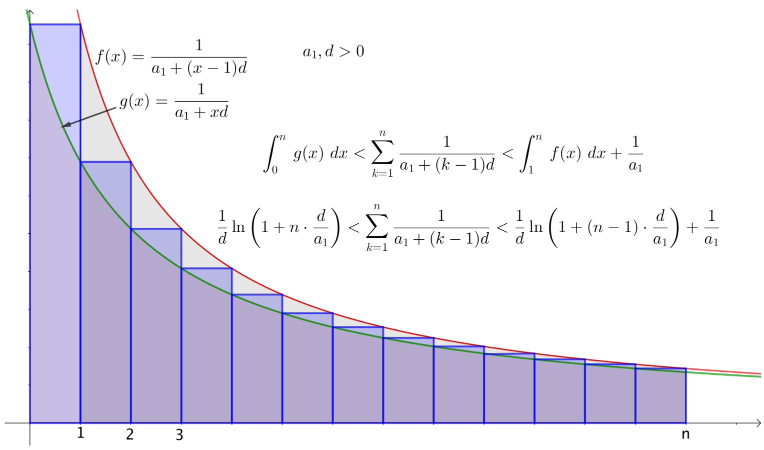
$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

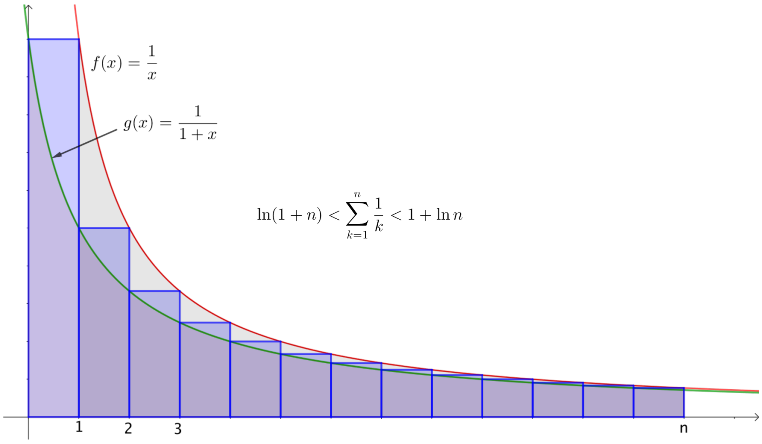
<u>Für eine geometrische Folge</u> $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

<u>Für eine harmonische Folge</u> $a_n = \frac{d \cdot a_1}{d + (n-1) \cdot a_1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$s_n = ??$$





Für die Folge der Quadratzahlen $a_n = n^2$.

Die n-te Teilsumme ist

$$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Für die Folge der Kubikzahlen $a_n = n^3$.

Die n-te Teilsumme ist

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Für die Folge der Fibonacci-Zahlen F_n

Die n-te Teilsumme ist

$$s_n = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

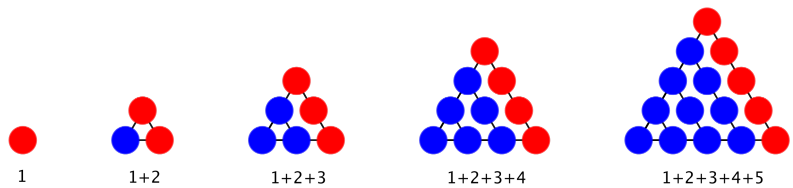
Figurierte Zahlen

Figurierte Zahlen sind (natürliche) Zahlen, die sich auf geometrische Muster beziehen.

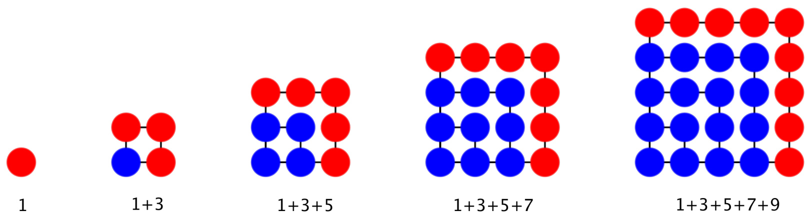
Idee der griechischen Mathematiker!

Polygonalzahlen: "Zweieckszahlen"

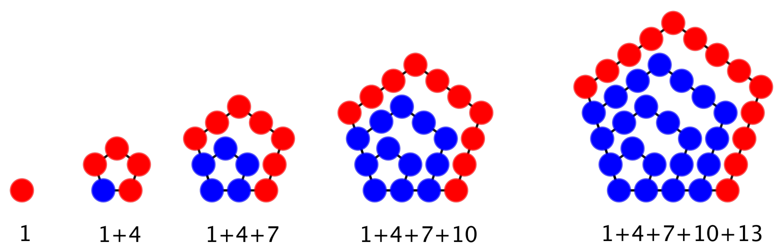
Polygonalzahlen: Dreieckszahlen



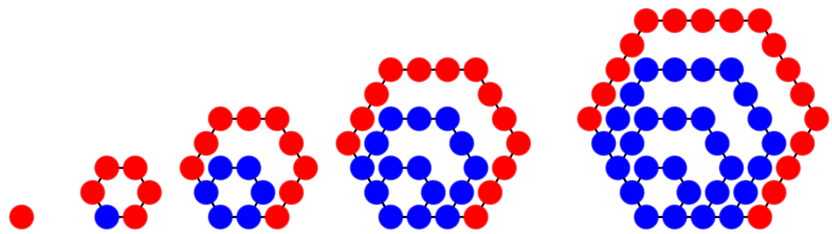
Polygonalzahlen: Viereckszahlen (Quadratzahlen)



Polygonalzahlen: Fünfeckszahlen



Polygonalzahlen: Sechseckszahlen



Die n-te "Zweieckszahl" lautet

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + (1 + (n-1) \cdot 0) = \quad n$$

Die n-te Dreieckszahl lautet

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (1 + (n-1) \cdot 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die n-te Viereckszahl lautet

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (1 + (n-1) \cdot 2) = \quad n^2$$

Die n-te Fünfeckszahl lautet

$$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (1 + (n-1) \cdot 3) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Die n-te Sechseckszahl lautet

$$1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + (1 + (n-1) \cdot 4) = n(2n-1)$$

Die n-te k-Eckszahl lautet

$$1 + [1 + (k-2)] + [1 + 2(k-2)] + \cdots + [1 + (n-1) \cdot (k-2)]$$
$$= \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} = (k-2) \binom{n}{2} + n$$

Fermatscher Polygonalzahlensatz

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens k k-Eckszahlen darstellen.

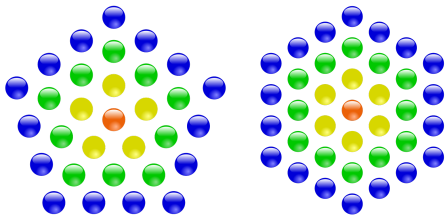
Wichtiger Spezialfall: **Vier-Quadrate-Satz**

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens vier Quadratzahlen darstellen.

„Ich war der erste, der den sehr schönen und vollkommen allgemeinen Satz entdeckt hat, dass jede Zahl entweder eine Dreieckszahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckszahlen ist; jede Zahl eine Quadratzahl oder die Summe von zwei, drei oder vier Quadratzahlen ist; entweder eine Fünfeckszahl oder die Summe von zwei, drei, vier oder fünf

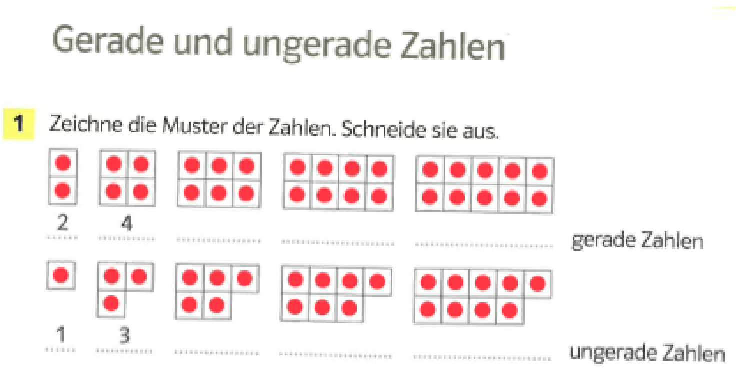
Fünfeckszahlen; und so weiter bis ins Unendliche, egal ob es ein Frage von Sechsecks-, Siebenecks- oder beliebigen Polygonalzahlen ist. **Ich kann den Beweis, der von vielen und abstrusen Mysterien der Zahlen abhängt, hier nicht angeben**; deswegen beabsichtige ich diesem Subjekt ein ganzes Buch zu widmen und in diesem Teil arithmetisch erstaunliche Fortschritte gegenüber den vorhergehenden bekannten Grenzen zu erbringen.“ (Pierre de Fermat)

Zentrierte Polygonalzahlen

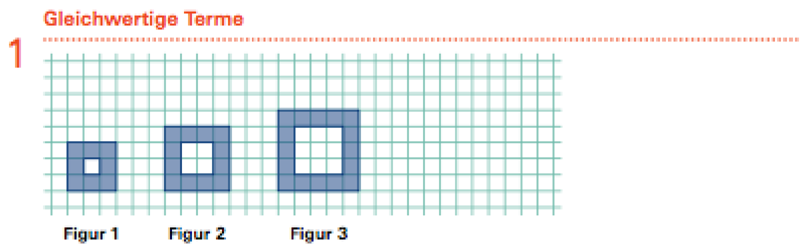


Die n-te zentrierte k-Eckszahl lautet

$$1 + \frac{kn(n-1)}{2}$$



Quelle: Zahlenbuch 1



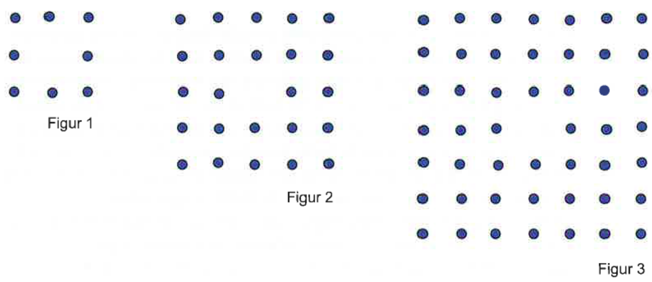
Quelle: mathbuch 3

Wichtige "Tätigkeiten" mit Termen

- Terme gewinnen
- Terme interpretieren
- Terme vergleichen
- Terme umformen/vereinfachen
- Terme auswerten

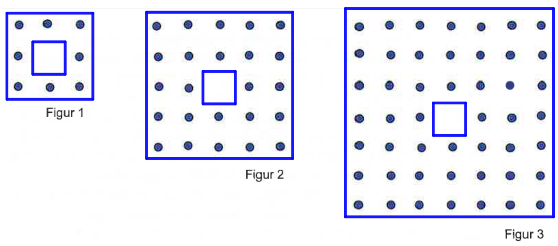
Aufgabe 3

In einer anderen langweiligen Lektion malt ein Schüler geometrische Figuren aus Punkten auf ein Blatt Papier. Hier sind die ersten drei Figuren abgebildet:



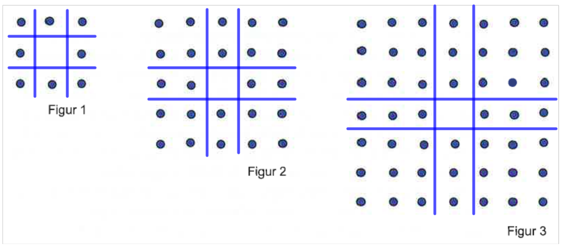
Wenn der Schüler immer nach demselben Muster weiterzeichnet, aus wie vielen Punkten wird dann die n-te Figur ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bestehen? Können Sie dafür einen Rechenausdruck abhängig von n angeben?

Armin P. Barth, Mathematik fürs Gymnasium 1, hep-Verlag



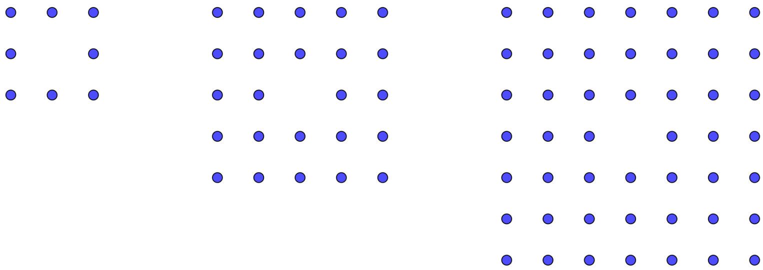
$3^2 - 1 \qquad 5^2 - 1 \qquad 7^2 - 1 \qquad \ldots \qquad (2n+1)^2 - 1$

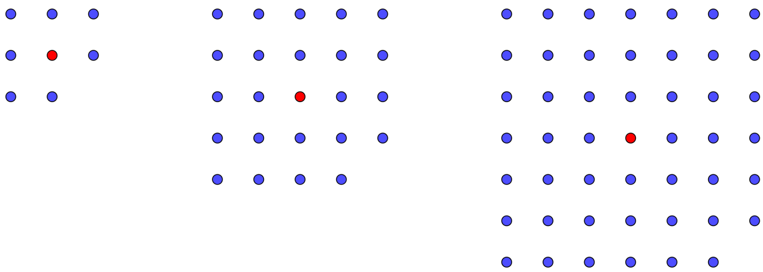
$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n$$

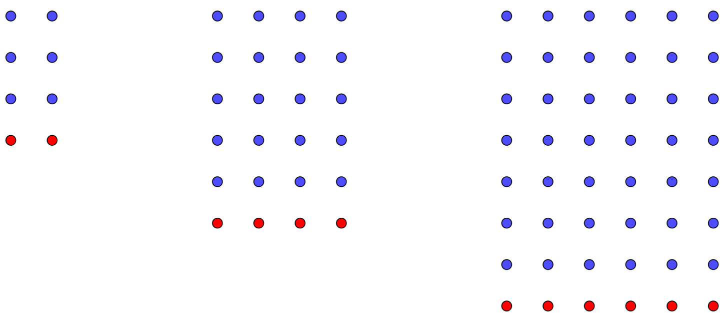


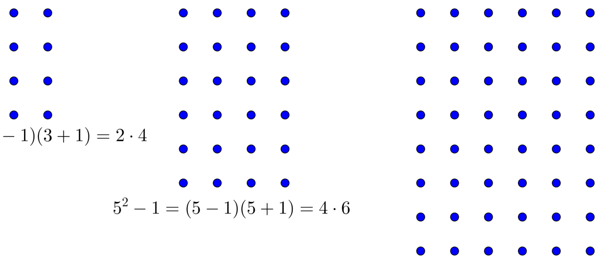
Figur 1 Figur 2 Figur 3

$4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \quad 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \quad 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \quad \ldots \quad 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n$









$3^2-1=(3-1)(3+1)=2\cdot 4$

$5^2-1=(5-1)(5+1)=4\cdot 6$

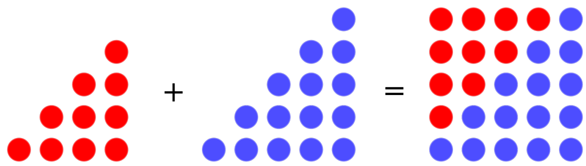
$7^2-1=(7-1)(7+1)=6\cdot 8$

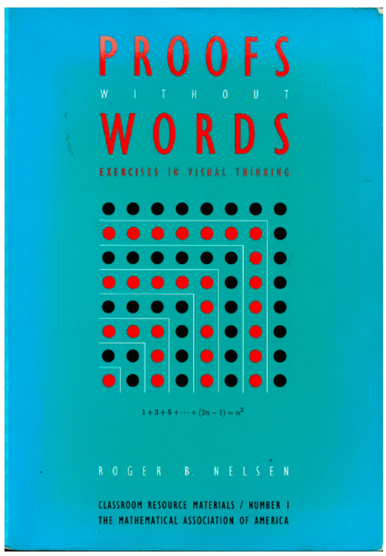
$\dots$

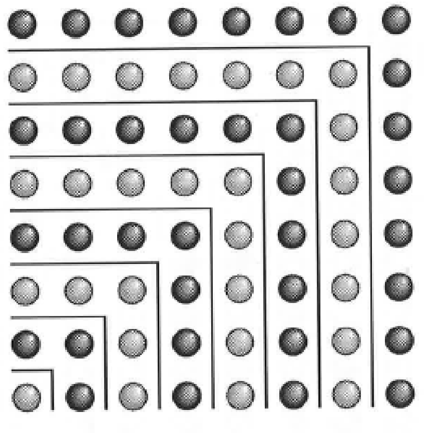
$(2n+1)^2-1=(2n+1-1)(2n+1+1)=2n\cdot(2n+2)$

Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl.

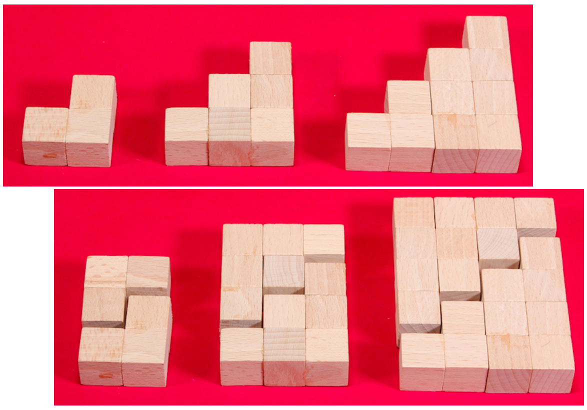
$$D_{n-1}+D_n=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2-n+n^2+n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$$







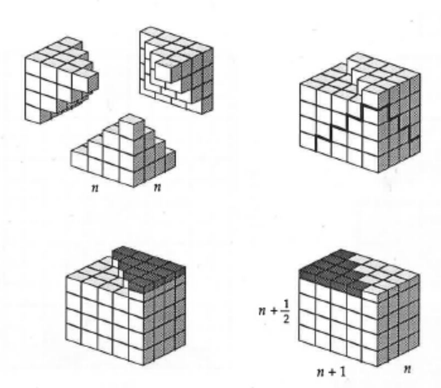
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

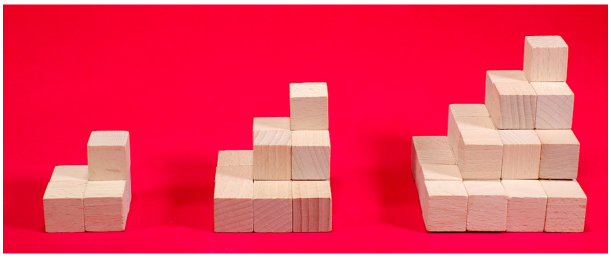


$$2 \cdot (1 + 2) = 2 \cdot 3; \quad 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 3 \cdot 4; \quad 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 4 \cdot 5$$

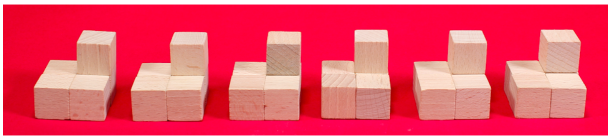
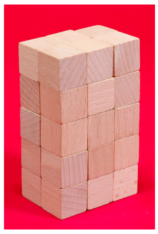
$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n + 1)$$

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + \frac{1}{2})$

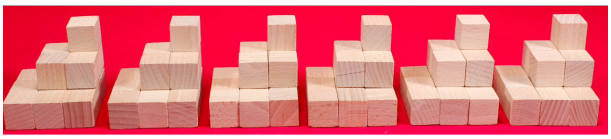




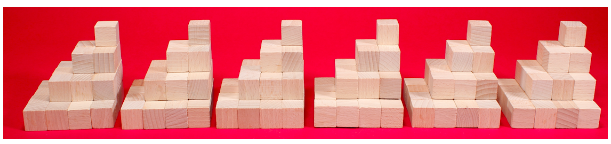
1^2+2^2; $1^2+2^2+3^2$; $1^2+2^2+3^2+4^2$

$6\cdot(1^2+2^2)=2\cdot3\cdot5$




$6\cdot(1^2+2^2+3^2)=3\cdot4\cdot7$




$6\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2)=4\cdot5\cdot9$

$$\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

4 Zahlenfolgen und Unendlichkeit

Theologen predigen das Unendliche als Eigenschaft Gottes und der Ewigkeit, aber unseren Erkenntnisdrang vermögen sie damit nicht zu stillen; Philosophen ergehen sich in phantastischen Spekulationen über das Unendliche, aber Definitives ist von ihnen nicht zu erfahren. Die Mathematik hingegen beansprucht, die wahre Wissenschaft vom Unendlichen zu sein und alles, was wir darüber wissen können, verdanken wir dem Genie der Mathematiker.

(Quelle: Taschner Rudolf, Das Unendliche, Springer Verlag, 1995)

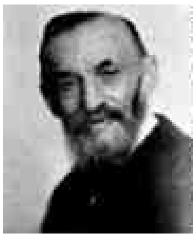
Unendlichkeit von Zahlenmengen

Wie gross eine Zahl auch sei, man kann sich immer eine grössere vorstellen, und weiter noch eine, welche die letzte übersteigt.

Blaise Pascal, französischer Mathematiker und Philosoph, (1623 bis 1662)

Wer sagt das eigentlich?

Die Peano-Axiome, um 1900



Giuseppe Peano, 1858 - 1932

Die Peano-Axiome, um 1900

Axiom 1: 1 (resp. 0) ist eine natürliche Zahl.

Axiom 2: Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.

Axiom 3: 1 (resp. 0) ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

Axiom 4: Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.

Axiom 5: Siehe weiter unten.

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$a_n = n^2$	1	4	9	16	25	36	$\cdots$

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.

$$\mathbf{a_n = n^2}$$

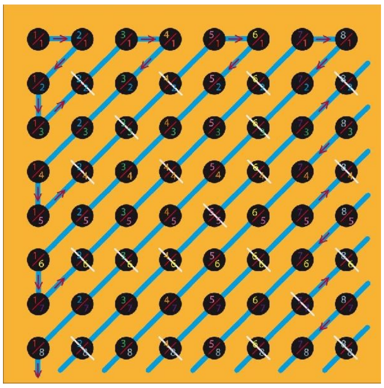
1. Begriff der Mächtigkeit von Zahlenmengen.

N, **Z** und **Q** sind gleichmächtig!

Folge der ganzen Zahlen:

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = 1,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = -2,\ \ a_5 = 3,\ \ a_6 = -3,\ \ \ldots$$

$$a_{2n-2} = -n\ \ ; a_{2n-1} = n,\ \ ; \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$



Quelle: Eli Maor, Eugen Jost, Beautiful Geometry

$$a_1 = \frac{1}{1},\ \ a_2 = \frac{2}{1},\ \ a_3 = \frac{1}{2},\ \ a_4 = \frac{1}{3},\ \ a_5 = \frac{3}{1},\ \ a_6 = \frac{4}{1},\ \ \ldots$$

2. Vollständige Induktion

Peano-Axiom 5: Enthält eine Menge X die 1 und mit jeder natürlichen Zahl k auch deren Nachfolger k', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

Behauptung: Für jede natürliche Zahl gilt:

$$1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$: Die Behauptung stimmt für $n = 1$.

Annahme: Die Behauptung stimmt für eine natürliche Zahl k.

$$1 + 2 + 3 + \cdots k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)\,[(k+1)+1]}{2}$$

Dann stimmt die Behauptung auch für $k + 1$.

Also stimmt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen! $\square$

Ludwig Wittgenstein: "Eine Induktion ist kein Beweis!"

$$\boxed{\begin{array}{c} A(1) \\ \forall k : A(k) \longrightarrow A(k+1) \end{array}} \implies \forall n : A(n)$$

'$\Longrightarrow$' ist keine Schlussfolgerung, sondern eine Festlegung!!!

Richard Dedekind: Idee der Induktiven Menge

Ernst Zermelo: Unendlichkeitsaxiom

3. Begriff des Grenzwertes, Konvergente Folgen

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{a}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es N_ε so, dass aus $n > N_\varepsilon$ folgt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Beispiel 1: $a_n = \frac{1}{n}$.

$$\text{Vermutung:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\varepsilon > 0$ sei gegeben. Setze $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$. Aus $n > N_\varepsilon$ folgt $\frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon}$. Also

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Exkurs:

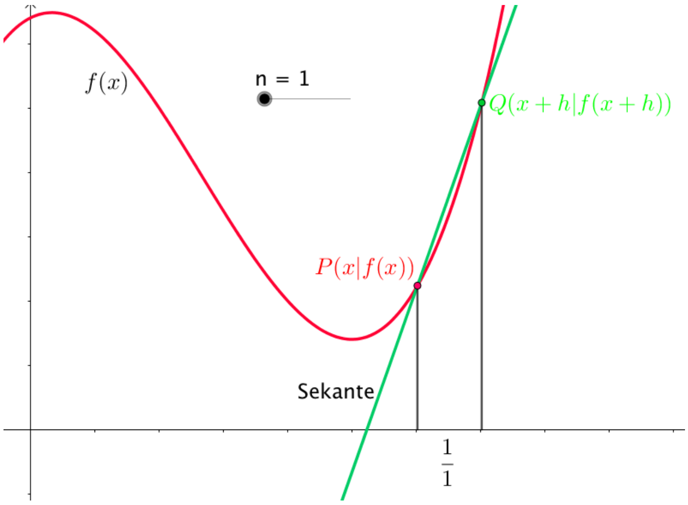
$$\text{Differenzenquotient:} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

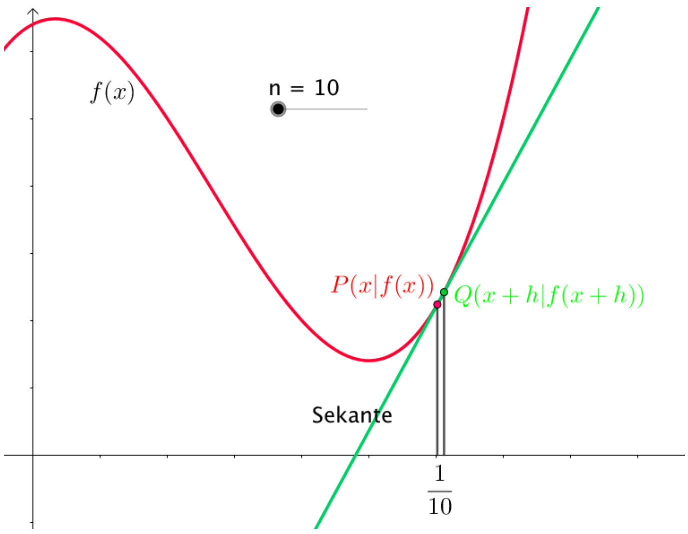
$$f(x) = x^2 \longrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Und jetzt?? "h wird kleiner und kleiner!", "h wird schliesslich 0."

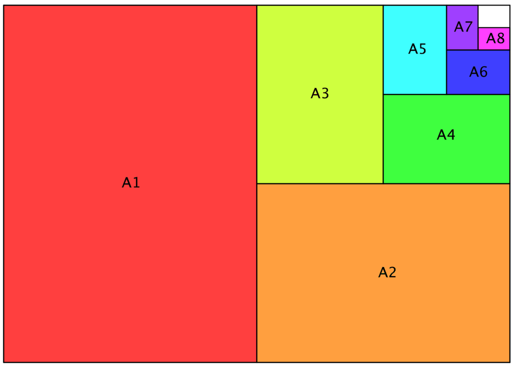
$$f(x) = x^2 \longrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Idee: Setze $h = \frac{1}{n}$. Dann wird $2x + \frac{1}{n}$ zu einer Folge von Sekantensteigungen.





Beispiel 2:



Wird der A_0-Bogen vollständig bedeckt?

Die Papierformate $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ bedecken

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

des Formates A_0.

$$\text{Ist } \lim_{n\to\infty} s_n = 1??$$

$$|s_n - 1| = \left|1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Wähle $n > N_\varepsilon = -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$.

$$\text{Ist } 0.9999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots = 1??$$

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{Für } -1 < q < 1 \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

5 Zahlenfolgen und Gleichungen (Exkurs: Negatives Wissen)

Negatives Wissen

Oser, Fritz & Spychiger, Maria (2005), *Lernen ist schmerzhaft*

Fritz Oser (1937 -) Schweizer Pädagoge, Psychologe

Negatives Wissen ist das Wissen darüber,

- was falsch ist,
- wie etwas nicht ist oder nicht funktioniert und
- was man nicht tun sollte.

Fritz Oser:

"Man kann etwas wirklich nur aus seinem Gegenteil erkennen!"

Fritz Oser:

"Um zu wissen, wie etwas funktioniert, muss man gleichzeitig wissen, wie etwas <u>nicht</u> funktioniert!"

Die 10 Sünden der Mathematik 407

21 Die 10 Sünden der Mathematik

Sünde:	**Korrekter Weg, falls vorhanden:**	**Aber:**
$-3^2 \neq +9$	Klammer-Sünde: $-3^2 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -9$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \neq \frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (Bruchrechnen!)
$(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$ $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Bin Formeln!) $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ (Bin Formel!) $(a \pm b)^n$ **Pascal Dreieck**, Bin. Satz!	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Potenzsatz!)
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$	$\sqrt{a^2 + b^2}$ **keine** Vereinfachung möglich! $\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5}\, a$	$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \|a\| \cdot \|b\|$ ist OK.
$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a \pm b}$ **keine** Vereinfachung möglich!	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\| a \pm b \| \neq \|a\| \pm \|b\|$	$\| a + b \| \leq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung)	$\| a \cdot b \| = \|a\| \cdot \|b\|$ ist OK.
$\ln(a \pm b) \neq \ln(a) \pm \ln(b)$	$\ln(a \pm b)$ **keine** Vereinfachung!	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$a^{x \pm y} \neq a^x \pm a^y$	$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (Potenzgesetze!)	$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$; $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$
$\sin(a \pm b) \neq \sin(a) \pm \sin(b)$	$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$	$\sin(a \cdot b)$ **keine** Vereinfachung!

A. Wetzel, Mathematik - einfach verständlich

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2} \quad ????????$$

Negatives Wissen: 1- und 2-stellige Rechenoperationen sind (fast) nie vertauschbar!!!

Zahlenfolgen und Gleichungen

Lehrplan: Die Schülerinnen und Schüler lösen Gleichungen, die im Zusammenhang mit den behandelten Funktionen auftauchen.

$$x^r, \ \ a^x, \ \ \ln x, \sin x, \ \ \sqrt{x}, \ \ \ldots$$

$$x^2 = e^x, \ \ \ln x = \sin x, \ \ x^5 - x = 2, \ \ \ldots$$

Botschaft des negativen Wissens:

Gleichungen kann man (fast) nie (exakt) lösen!

Tabletten
Eine Patientin nimmt täglich eine Tablette mit 5 mg eines Wirkstoffes ein. In den folgenden 24 Stunden werden im Körper 40 % abgebaut und ausgeschieden.

Problem: Bestimme a_n, die Menge Wirkstoff (in mg) im Körper der Patientin am Tag n.

Es gilt: $a_1 = 5$; $a_{n+1} = 0.6 \cdot a_n + 5$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & 0.6 \cdot a_n + 5 \\ {\scriptstyle n\to\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ a & = & 0.6 \cdot a + 5 \quad \Longrightarrow \quad a = 12.5 \end{array}$$

Geometrische Reihe

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

$$s_{n+1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n = a_1 + q \cdot s_n$$

$$\begin{array}{ccc} s_{n+1} & = & a_1 + q \cdot s_n \\ {\scriptstyle n\to\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ s & = & a_1 + q \cdot s \quad \Longrightarrow \quad s = \dfrac{a_1}{1-q} \qquad (-1 < q < 1) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} a_{n+1} \arrow[d] & = 0.6 \cdot & a_n \arrow[d] & + 5 \\ a & = 0.6 \cdot & a & + 5 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s_{n+1} \arrow[d] & = a_1 + q \cdot & s_n \arrow[d] \\ s & = a_1 + q \cdot & s \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a_{n+1} & = 0.6 \cdot & a_n & + 5 \\ a \arrow[u] & = 0.6 \cdot & a \arrow[u] & + 5 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s_{n+1} & = a_1 + q \cdot & s_n \\ s \arrow[u] & = a_1 + q \cdot & s \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Beispiel:

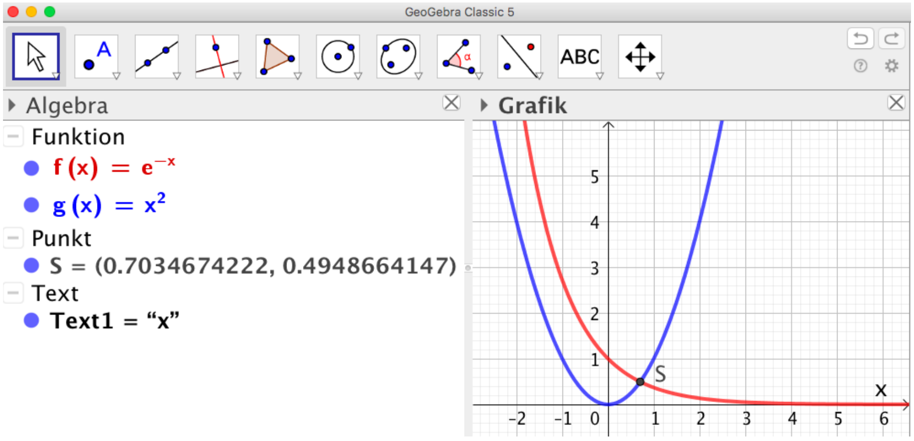
$$x^2 = e^{-x}$$

$$x = \sqrt{e^{-x}}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{e^{-x_n}}$$

X2 fx =WURZEL(EXP(-X1))

	X	Y	Z	AA
1	1			
2	0.60653066			
3	0.73840315			
4	0.69128605			
5	0.7077651			
6	0.70195741			
7	0.70399875			
8	0.70328056			
9	0.70353315			
10	0.7034443			
11	0.70347555			
12	0.70346456			
13	0.70346843			
14	0.70346707			
15	0.70346755			
16	0.70346738			
17	0.70346744			
18	0.70346742			
19	0.70346742			
20	0.70346742			


GeoGebra Classic 5
Algebra
Funktion
f (x) = e^{−x}
g (x) = x²
Punkt
S = (0.7034674222, 0.4948664147)
Text
Text1 = “x”
Grafik
S
x

Weitere Themen...

- Das Flächenproblem: Exhaustion, Unter- und Obersummen,...
- Lucas-Folgen, spezielle Rechtecke, ...
- $a_{n+1} = r \cdot a_n + s$: Turm von Hanoi, Legende vom Weizenkorn, ...
- Approximation von (irrationalen) Zahlen durch rationale: Dezimalbruchentwicklung, Kettenbrüche,
- Folgen komplexer Zahlen: Fraktale, Riemann-Vermutung,....