Teil I: Mathematische Herausforderungen

Dima Nikolenkov

KS Trogen

dmitrij.nikolenkov@kst.ch

11. September 2019

PLAN

- Math Challenge an der KST
  Google Math Challenge Trogen
- Mathe Untersuchungen in der Schule
- Mathe Auktion Aufgaben
  (Min/Max Konstruktionen)

Math challenge an der KS Trogen

- TeilnehmerInnen: Kurzzeitgymnasium Lernende, Alter: 14-16
- 8 Serien, je 4 Aufgaben, etwa ein Mal im Monat
- 2-3 Wochen Zeit für eine Serie
- Keine Voraussetzungen, Teilnahme ist freiwillig
- Hauptidee: Freude am Testen und Experimentieren, logisches Denken
- Schwierigkeitsgrad: 2 einfache, 1 mittlere, 1 schwierigere
- Die besten bekommen eine gute Note in Mathematik / Erweiterte Mathematik. Jede Schule kann da eigene Entscheidung treffen.

Bereiche der Mathematik

- Zahlentheorie
- Konstruktionen / Schätzung und Konstruktion
- Unkonventionelles (Sudokulike / Clueless / SMI)
- Kombinatorik
- Algebra
- Geometrie

Lösungen Serie I – 1 Algebra

- Man schreibe 10 Zahlen so, dass
  - jede nächste Zahl **nicht kleiner** als die vorhergehende ist,
  - die Summe der Quadrate dieser Zahlen gleich 2 ist und
  - die **dritte Zahl** am grössten ist.

- Lösung **1/2**
- Die dritte Zahl kann nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sein, da sonst alle folgenden Zahlen mindestens $\frac{1}{2}$ sind und die Summe der Quadrate ist dann grösser als $8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \cdot 0.25 = 2$.
- Ein Beispiel:

$$0, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}$$

Lösungen Serie I – 2 Schätzung und Konstruktion

- Jeder der 12 Goldgräber hat etwas Goldsand gefunden.
  Sie können sich paarweise oder in Dreiergruppen treffen.
  Bei jedem solchen Treffen wird der gesamte Goldsand in der Gruppe gleichmässig verteilt.
  Erkläre wie die Goldgräber sich treffen müssen, damit jeder gleich viel Goldsand hat.

- Lösung:
- Man betrachte eine 4-er-Gruppe: sie treffen sich zuerst paarweise $(1, 2)$ und $(3, 4)$ und dann zwischen den Paaren $(1, 3)$ und $(2, 4)$.
- Man macht es in drei 4-er-Gruppen, dann haben $(1, 2, 3, 4)$, $(5, 6, 7, 8)$ und $(9, 10, 11, 12)$ gleich viel Goldsand.
- Jetzt machen wir vier Treffen der Dreiergruppen $(1, 5, 9)$, $(2, 6, 10)$, $(3, 7, 11)$ und $(4, 8, 12)$.

Beispiel 3 – Unkonventionelles: Kryptarithm

Im Kryptarithmus $FOUR + FIVE = NINE$ ist bekannt, dass
- die Zahl $FOUR$ durch 4 teilbar ist,
- die Zahl $FIVE$ durch 5 teilbar ist,
- die Zahl $NINE$ durch 3 teilbar ist.

Bestimme die Zahl $NINE$.

- Lösung: $NINE = 3435$
- $R = 0$, $E = 5$, $O = 9$ und $U + V = 10 + N$
- $N = 2F + 1$ ist ungerade, 9 und 5 sind belegt, $U + V \leq 15$, also $N = 3$ und $F = 1$
- Dann gilt $\{U, V\} = \{7, 6\}$. Da $FOUR$ durch 4 teilbar ist, muss $U = 6$ sein
- Da $NINE$ durch 3 teilbar ist, folgt aus der Quersumme $I = 4$
- $FOUR = 1960$, $FIVE = 1475$, $NINE = 3435$

Lust mitzumachen?

- Dima Nikolenkov, `dmitrij.nikolenkov@kst.ch`
- Dima liefert die Serien **mit Lösungen.**
- Korrekturaufwand: etwa eine Stunde für 12 – 15 Lernenden.

Mathe Untersuchungen in der Schule

- Geburt einer Aufgabe - eine Geschichte
- Stellen Sie eine natürliche Zahl n als Produkt der kleinsten Anzahl rationaler Faktoren dar, deren Summe Null ist.
- Beispiele: $1 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1)$, $2 = 2 \cdot (-1) \cdot (-1)$, $3 = ?$, $4 = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 1$, $6 = 3 \cdot (-2) \cdot (-1)$
- Gibt es andere Darstellungen? Wie viele?
- Ist die Anzahl der Faktoren minimal?
- Was ist mit reellen Faktoren?

Bereiche

- Arithmetik
- Algebra
- Geometrie
- Kombinatorik – Wie viele Rechtecke gibt es auf einem $n \times m$ Brett?
- Algorithmen

Begleitung

- Schritt für Schritt
- Methodische Begleitung – Kommentar, Referenz, Verallgemeinerung
- Formulierungen und Hilfestellungen – FRaPpe

F Frage – "Welche Länge kann diese Zeile haben"?

R Regelmässigkeit – "Differenz zweier Nachbarzahlen ist immer ungerade."

P Prozess oder Konstruktion

Arithmetic

Zerlegung einer Zahl – Thinking mathematically by J.Mason
Die Zahl 15 kann auf drei Arten als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen dargestellt werden:

$$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

- Wie viele solcher Darstellungen gibt es für die Zahl 115?
- Wie finde ich die Anzahl der Darstellungen für ein beliebiges n?
- Für welche Zahlen ist eine solche Darstellung unmöglich?

Untersuchung von Graphen linearer Funktionen auf der Parameterebene (m, q).

Wir betrachten die Koordinatenebene $(m; q)$. Jede Gerade $y = mx + q$ wird in dieser Ebene als Punkt dargestellt.

Auf der Koordinatenebene $(m; q)$ werden drei Geraden gezeichnet, die durch einen Punkt verlaufen.

Jede solche Gerade repräsentiert ein Schar von Geraden in der Ebene $(x; y)$.

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Scharen?
- Die gleiche Frage für 3 parallele Geraden.

Quadrate auf dem Gitternetz.

Welche Quadrate mit ganzzahligen Flächeninhalten kann man auf dem Gitternetz zeichnen?

Die Eckpunkte müssen auf den Gitternetzpunkten zu liegen kommen.

- Versuche die Quadrate mit der Fläche $1, 2, 4, 5, 8, 13, 26, \ldots$ zu zeichnen.

Mathe Auktion Aufgaben

- Bestimme die grösste Zahl mit verschiedenen Ziffern,
  die durch jede ihrer Ziffern teilbar ist.
- Zerschneide ein Quadrat in die **minimale** Anzahl spitzwinkliger Dreiecke
  (ALLE Winkel müssen **streng** kleiner als 90° sein).
- Man hat 5 Karten mit den Brüchen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.
  Man darf einige (oder alle) Karten, Zeichen der mathematischen Operationen$(+, -, \cdot, :)$ und Klammern benutzen.
  Drücke alle ganzen Zahlen von 0 bis 10 aus.
  Wie viele weitere Zahlen – $11, 12, \ldots$ kannst du so ausdrücken?

Mathe Auktion Aufgaben – Zweiprimzahlen

Eine natürliche Zahl heisst **zweiprim**, wenn je zwei benachbarte Ziffern verschiedene zweistellige Primzahlen bilden.
1371 ist zweiprim, da 13, 37 und 71 verschiedene Primzahlen sind.
136 ist nicht zweiprim, da 36 nicht prim ist und
1313 ist nicht zweiprim, weil 13 zweimal vorkommt.

- Bestimme die grösste 3-stellige Zweiprimzahl.
- Bestimme die grösste 4-stellige / 5-stellige / 6-stellige Zweiprimzahl.
- Erkläre, warum es eine grösste Zweiprimzahl geben muss.
- Bestimme die **grösstmögliche** Zweiprimzahl.
- Beweise, dass deine Zahl die grösste Zweiprimzahl ist.