

# Geometrie 1 & 2



Michael Graf, Heinz Klemenz

TMU Frauenfeld, 11. September 2019

# Inhalt

- 1 Entstehung und Überblick
- 2 Übersicht Geometrie 1
- 3 Übersicht Geometrie 2
- 4 Leitgedanken
- 5 Beispiele

# Entstehung

# Entstehung

2007 - 2013



2014 Anfrage der DMK, Beginn der Überarbeitung

2017 Herausgabe des ersten Bandes durch den Orell Füssli Verlag

2019 Herausgabe des zweiten Bandes durch den Orell Füssli Verlag

# Überblick

# Überblick

## Umfang:

- Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form
- Aufgaben- und Lösungsband auch als e-Book  
OF-App für iOS oder Android (offline) oder im Browser (online)  
<https://reader.ofv.ch>
- PDF mit Arbeitsblättern im e-Book des Lösungsbands als Download enthalten

# Überblick

Umfang:

- **Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form**
- Aufgaben- und Lösungsband auch als e-Book  
OF-App für iOS oder Android (offline) oder im Browser (online)  
<https://reader.ofv.ch>
- PDF mit Arbeitsblättern im e-Book des Lösungsbands als Download enthalten

# Überblick

Umfang:

- Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form

13. 📄 Im Würfel sind die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gegeben.

Zeichne vom Punkt  $P$  aus einen Vektor  $\vec{w}$ , welcher zu  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  komplanar, aber jeweils nicht kollinear zu einem der beiden ist.



# Überblick

## Umfang:

- Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form

13. 📄 Im Würfel sind die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gegeben.

Zeichne vom Punkt  $P$  aus einen Vektor  $\vec{w}$ , welcher zu  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  komplanar, aber jeweils nicht kollinear zu einem der beiden ist.

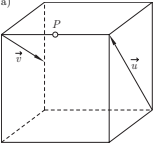
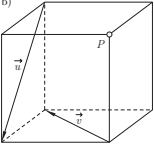
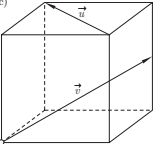
# Überblick

Umfang:

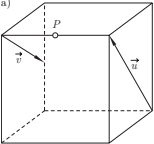
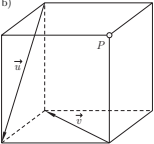
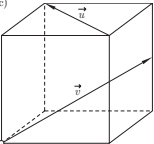
- Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form

10 Vektoren 10.2 Elementare Vektoroperationen (→ S. 88 f.)

13. Im Würfel sind die Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gegeben.  
Zeichne vom Punkt  $P$  aus einen Vektor  $\vec{w}$ , welcher zu  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  komplanar, aber jeweils nicht kollinear zu einem der beiden ist.

a)  b)  c) 

Evtl. weitere Lösungen:

a)  b)  c) 

# Überblick

Umfang:

- Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form
- **Aufgaben- und Lösungsband auch als e-Book**  
**OF-App für iOS oder Android (offline) oder im Browser (online)**  
<https://reader.ofv.ch>
- PDF mit Arbeitsblättern im e-Book des Lösungsbands als Download enthalten

# Überblick

Umfang:

- Aufgaben- und Lösungsband, Arbeitsblätter (📄) in PDF-Form
- Aufgaben- und Lösungsband auch als e-Book  
OF-App für iOS oder Android (offline) oder im Browser (online)  
<https://reader.ofv.ch>
- **PDF mit Arbeitsblättern im e-Book des Lösungsbands als Download enthalten**

# Überblick

# Überblick

Aufbau aller Kapitel im Aufgabenbuch:

- **Diverse Unterkapitel**
- Vermischte Aufgaben
  - Zum Repetieren
  - Zum Vertiefen und Erforschen
- Weiterführende Aufgaben

Am Ende des Buches:

- Numerische Lösungen, Zeichen und Abkürzungen, Stichwortverzeichnis

Im Lösungsbuch:

- Zu Beginn des Kapitels eine Zusammenfassung der Theorie

# Überblick

Aufbau aller Kapitel im Aufgabenbuch:

- Diverse Unterkapitel
- **Vermischte Aufgaben**
  - **Zum Repetieren**
  - **Zum Vertiefen und Erforschen**
- Weiterführende Aufgaben

Am Ende des Buches:

- Numerische Lösungen, Zeichen und Abkürzungen, Stichwortverzeichnis

Im Lösungsbuch:

- Zu Beginn des Kapitels eine Zusammenfassung der Theorie

# Überblick

Aufbau aller Kapitel im Aufgabenbuch:

- Diverse Unterkapitel
- Vermischte Aufgaben
  - Zum Repetieren
  - Zum Vertiefen und Erforschen
- **Weiterführende Aufgaben**

Am Ende des Buches:

- Numerische Lösungen, Zeichen und Abkürzungen, Stichwortverzeichnis

Im Lösungsbuch:

- Zu Beginn des Kapitels eine Zusammenfassung der Theorie



# Überblick

Aufbau aller Kapitel im Aufgabenbuch:

- Diverse Unterkapitel
- Vermischte Aufgaben
  - Zum Repetieren
  - Zum Vertiefen und Erforschen
- Weiterführende Aufgaben

Am Ende des Buches:

- **Numerische Lösungen, Zeichen und Abkürzungen, Stichwortverzeichnis**

Im Lösungsbuch:

- Zu Beginn des Kapitels eine Zusammenfassung der Theorie

# Überblick

Aufbau aller Kapitel im Aufgabenbuch:

- Diverse Unterkapitel
- Vermischte Aufgaben
  - Zum Repetieren
  - Zum Vertiefen und Erforschen
- Weiterführende Aufgaben

Am Ende des Buches:

- Numerische Lösungen, Zeichen und Abkürzungen, Stichwortverzeichnis

Im Lösungsbuch:

- **Zu Beginn des Kapitels eine Zusammenfassung der Theorie**

# Überblick

## Beispiel: 3 Kongruenz von Figuren

### Vorkenntnisse

Grundkonstruktionen, Grundlegendes der Kongruenzabbildungen

### Inhalte

### Kongruenz und Kongruenzsätze (3.1)

Umgangssprachlich:

Zwei Figuren sind **kongruent** (deckungsgleich), wenn man sie passend aufeinander legen kann.

Mathematische Definition:

Zwei Figuren  $F_1$  und  $F_2$  heissen **kongruent** ( $F_1 \cong F_2$ ), wenn sie durch eine oder mehrere Kongruenzabbildungen (Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen) aufeinander abgebildet werden können.

#### Kongruenzsätze im Dreieck

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie

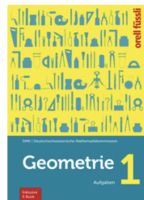
1. in allen drei Seiten übereinstimmen (**SSS**) *oder*
2. in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen (**SWS**) *oder*
3. in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW**) *oder*
4. in zwei Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (**SsW**).

Bemerkung: Der Fall SSW kann auf den Fall WSW zurückgeführt werden (konstante Winkelsumme).



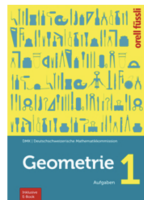
# Überblick

## Inhaltsverzeichnis



# Überblick

## Inhaltsverzeichnis



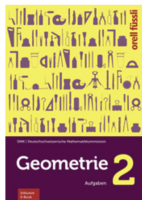
- 1 Grundlagen der Geometrie
- 2 Geometrische Abbildungen
- 3 Kongruenz von Figuren
- 4 Flächen- und Volumenberechnung
- 5 Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck
- 6 Der Kreis

# Überblick

## Inhaltsverzeichnis



- 1 Grundlagen der Geometrie
- 2 Geometrische Abbildungen
- 3 Kongruenz von Figuren
- 4 Flächen- und Volumenberechnung
- 5 Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck
- 6 Der Kreis

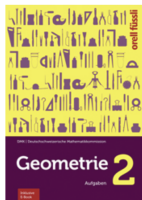


# Überblick

## Inhaltsverzeichnis



- 1 Grundlagen der Geometrie
- 2 Geometrische Abbildungen
- 3 Kongruenz von Figuren
- 4 Flächen- und Volumenberechnung
- 5 Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck
- 6 Der Kreis

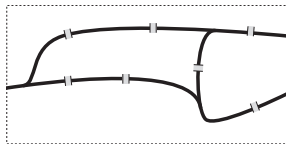


- 7 Ähnlichkeit
- 8 Trigonometrie
- 9 Räumliche Geometrie
- 10 Vektoren
- 11 Analytische Geometrie

# Kapitel 1: Grundlagen der Geometrie

## Aufbau:

- Einführung ▶
- Grundbegriffe, Winkel
- Grundkonstruktionen
- Punktmengen

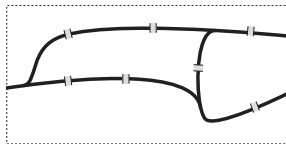




# Kapitel 1: Grundlagen der Geometrie

## Aufbau:

- Einführung ▶
- Grundbegriffe, Winkel
- Grundkonstruktionen
- Punktmengen



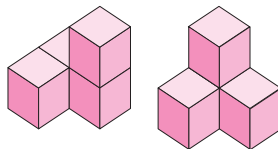
## Besonderes:

- Verschiedene Zugänge zur Geometrie ▶

# Kapitel 1: Grundlagen der Geometrie

## Aufbau:

- Einführung ►
- Grundbegriffe, Winkel
- Grundkonstruktionen
- Punktmengen



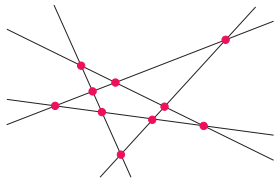
## Besonderes:

- Verschiedene Zugänge zur Geometrie ►

# Kapitel 1: Grundlagen der Geometrie

## Aufbau:

- Einführung ▶
- Grundbegriffe, Winkel
- Grundkonstruktionen
- Punktmengen



## Besonderes:

- Verschiedene Zugänge zur Geometrie ▶

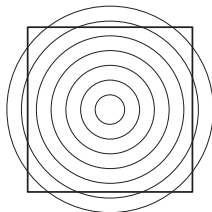
# Kapitel 1: Grundlagen der Geometrie

## Aufbau:

- Einführung ▶
- Grundbegriffe, Winkel
- Grundkonstruktionen
- Punktmengen

## Besonderes:

- Verschiedene Zugänge zur Geometrie ▶



# Kapitel 1: Grundlagen der Geometrie

## Aufbau:

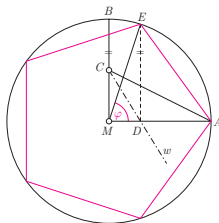
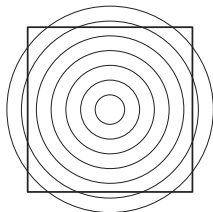
- Einführung ▶
- Grundbegriffe, Winkel
- Grundkonstruktionen
- Punktmengen

## Besonderes:

- Verschiedene Zugänge zur Geometrie ▶

## Weiterführende Aufgaben:

- Regelmässige  $n$ -Ecke
- Konstruktion des regelmässigen Fünfecks ▶
- Konstruierbarkeit von Winkeln,  
Winkeldreiteilung



## Kapitel 2: Geometrische Abbildungen

### Aufbau:

- Kongruenzabbildungen  
(Achsen- und Punktspiegelung, Drehung, Translation) ▶
- Symmetrie sowie Konstruktionen



# Kapitel 2: Geometrische Abbildungen

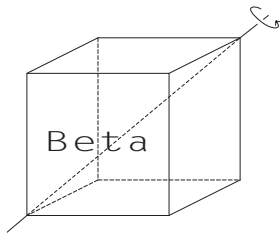
## Aufbau:

- Kongruenzabbildungen (Achsen- und Punktspiegelung, Drehung, Translation) ▶
- Symmetrie sowie Konstruktionen



## Besonderes:

- Viele Vorlagenblätter
- Räumliche Aufgaben ▶



## Kapitel 2: Geometrische Abbildungen

### Aufbau:

- Kongruenzabbildungen (Achsen- und Punktspiegelung, Drehung, Translation) ▶
- Symmetrie sowie Konstruktionen

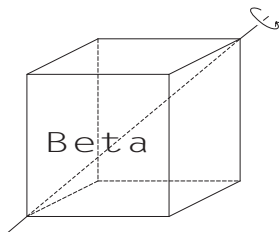


### Besonderes:

- Viele Vorlagenblätter
- Räumliche Aufgaben ▶

### Weiterführende Aufgaben:

- Kreisinverson
- Faltgeometrie

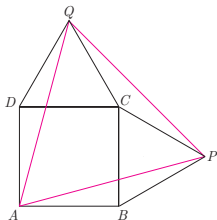




# Kapitel 3: Kongruenz von Figuren

## Aufbau:

- Kongruenzbegriff und Kongruenzsätze ►
- Besondere Linien und Punkte im Dreieck
- Dreieckskonstruktionen
- Vierecke und Viereckskonstruktionen



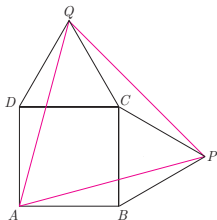
# Kapitel 3: Kongruenz von Figuren

## Aufbau:

- Kongruenzbegriff und Kongruenzsätze ►
- Besondere Linien und Punkte im Dreieck
- Dreieckskonstruktionen
- Vierecke und Viereckskonstruktionen

## Besonderes:

- *Eine* Seite Dreieckskonstruktionen



# Kapitel 3: Kongruenz von Figuren

## Aufbau:

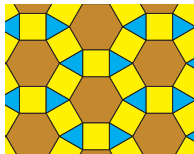
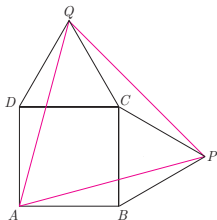
- Kongruenzbegriff und Kongruenzsätze ►
- Besondere Linien und Punkte im Dreieck
- Dreieckskonstruktionen
- Vierecke und Viereckskonstruktionen

## Besonderes:

- *Eine* Seite Dreieckskonstruktionen

## Weiterführende Aufgaben:

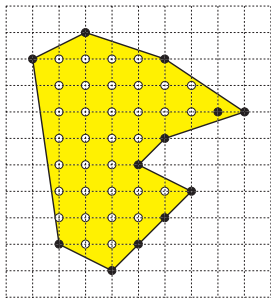
- Parkettierungen ►
- Kongruenzsätze für Vierecke



# Kapitel 4: Flächen- und Volumenberechnung

## Aufbau:

- Längen- und Flächenmasse
- Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, Dreiecke, Trapeze und Drachenvierecke
- Flächenverwandlung und Flächenteilung
- Oberflächen- und Rauminhalte (halbe und ganze Quader)



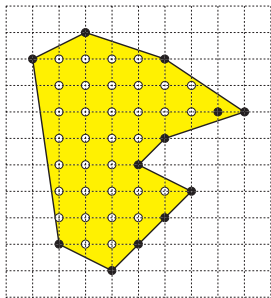
# Kapitel 4: Flächen- und Volumenberechnung

## Aufbau:

- Längen- und Flächenmasse
- Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, Dreiecke, Trapeze und Drachenvierecke
- Flächenverwandlung und Flächenteilung
- Oberflächen- und Rauminhalte (halbe und ganze Quader)

## Besonderes:

- Flächen- und Zerlegungsgleichheit



# Kapitel 4: Flächen- und Volumenberechnung

## Aufbau:

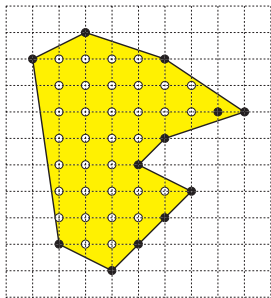
- Längen- und Flächenmasse
- Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, Dreiecke, Trapeze und Drachenvierecke
- Flächenverwandlung und Flächenteilung
- Oberflächen- und Rauminhalte (halbe und ganze Quader)

## Besonderes:

- Flächen- und Zerlegungsgleichheit

## Weiterführende Aufgaben:

- Formel von Pick ►



# Kapitel 4: Flächen- und Volumenberechnung

## Aufbau:

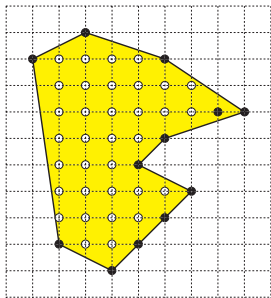
- Längen- und Flächenmasse
- Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, Dreiecke, Trapeze und Drachenvierecke
- Flächenverwandlung und Flächenteilung
- Oberflächen- und Rauminhalte (halbe und ganze Quader)

## Besonderes:

- Flächen- und Zerlegungsgleichheit

## Weiterführende Aufgaben:

- Formel von Pick ►

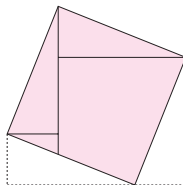


$$A = i + \frac{1}{2}r - 1$$

# Kapitel 5: Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck

## Aufbau:

- Satz von Pythagoras
- Höhensatz und Kathetensatz





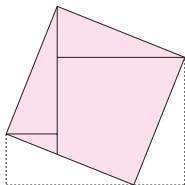
# Kapitel 5: Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck

## Aufbau:

- Satz von Pythagoras
- Höhensatz und Kathetensatz

## Besonderes:

- Diverse Beweise ►
- Diverse räumliche Anwendungen
- Kehrsatz des Satzes von Pythagoras
- Anwendung der Normalform von Wurzeltermen



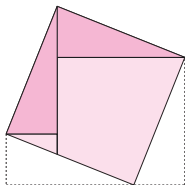
# Kapitel 5: Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck

## Aufbau:

- Satz von Pythagoras
- Höhensatz und Kathetensatz

## Besonderes:

- Diverse Beweise ►
- Diverse räumliche Anwendungen
- Kehrsatz des Satzes von Pythagoras
- Anwendung der Normalform von Wurzeltermen



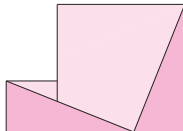
# Kapitel 5: Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck

## Aufbau:

- Satz von Pythagoras
- Höhensatz und Kathetensatz

## Besonderes:

- Diverse Beweise ►
- Diverse räumliche Anwendungen
- Kehrsatz des Satzes von Pythagoras
- Anwendung der Normalform von Wurzeltermen



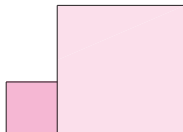
# Kapitel 5: Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck

## Aufbau:

- Satz von Pythagoras
- Höhensatz und Kathetensatz

## Besonderes:

- Diverse Beweise ►
- Diverse räumliche Anwendungen
- Kehrsatz des Satzes von Pythagoras
- Anwendung der Normalform von Wurzeltermen



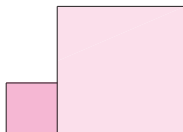
# Kapitel 5: Die Satzgruppe im rechtwinkligen Dreieck

## Aufbau:

- Satz von Pythagoras
- Höhensatz und Kathetensatz

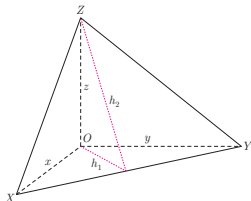
## Besonderes:

- Diverse Beweise ►
- Diverse räumliche Anwendungen
- Kehrsatz des Satzes von Pythagoras
- Anwendung der Normalform von Wurzeltermen



## Weiterführende Aufgaben:

- Pythagoreische Tripel und Quadrupel ►
- Flächenformel von Heron

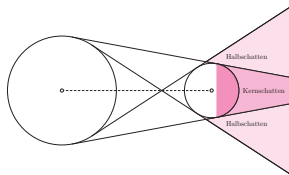


# Kapitel 6: Der Kreis

## Aufbau:

### 1. Teil: Konstruktionen (unabhängig von Kap. 5)

- Tangenten, Sekanten, Sehnen ▶
- Tangenten- und Sehnenvierecke
- Peripheriewinkelsatz, Ortsbogen

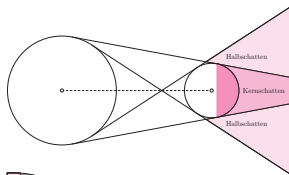


# Kapitel 6: Der Kreis

## Aufbau:

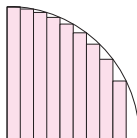
### 1. Teil: Konstruktionen (unabhängig von Kap. 5)

- Tangenten, Sekanten, Sehnen ▶
- Tangenten- und Sehnenvierecke
- Peripheriewinkelsatz, Ortsbogen



### 2. Teil: Berechnungen

- Umfang und Flächeninhalt ▶
- Sektor, Segment, Bogenlänge

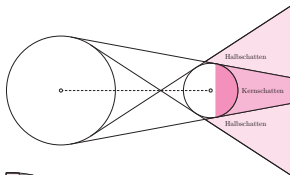


# Kapitel 6: Der Kreis

## Aufbau:

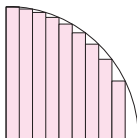
### 1. Teil: Konstruktionen (unabhängig von Kap. 5)

- Tangenten, Sekanten, Sehnen ▶
- Tangenten- und Sehnenvierecke
- Peripheriewinkelsatz, Ortsbogen



### 2. Teil: Berechnungen

- Umfang und Flächeninhalt ▶
- Sektor, Segment, Bogenlänge



## Weiterführende Aufgaben:

- Algorithmus zur Exhaustionsmethode von Archimedes ▶
- Näherungskonstruktionen zur „Quadratur des Kreises“

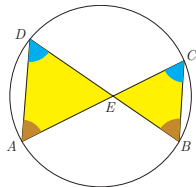
$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$$



# Kapitel 7: Ähnlichkeit

## Aufbau:

- Verhältnisse und Proportionen
- Ähnliche Figuren
- Strahlensätze
- Zentrische Streckung



# Kapitel 7: Ähnlichkeit

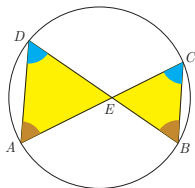
## Aufbau:

- Verhältnisse und Proportionen

### **WW-Satz:**

*Zwei Dreiecke sind genau dann winkelgleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.*

- Ähnliche Figuren
- Strahlensätze
- Zentrische Streckung



# Kapitel 7: Ähnlichkeit

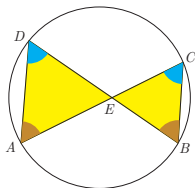
## Aufbau:

- Verhältnisse und Proportionen

### WW-Satz:

*Zwei Dreiecke sind genau dann winkelgleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.*

- Ähnliche Figuren
- $\Rightarrow$  Strahlensätze
- $\Rightarrow$  Zentrische Streckung



# Kapitel 7: Ähnlichkeit

## Aufbau:

- Verhältnisse und Proportionen

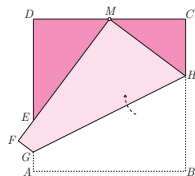
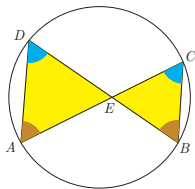
### WW-Satz:

*Zwei Dreiecke sind genau dann winkelgleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.*

- Ähnliche Figuren
- $\Rightarrow$  Strahlensätze
- $\Rightarrow$  Zentrische Streckung

## Besonderes:

- Die drei Hauptteile sind unabhängig voneinander und können in beliebiger Reihenfolge behandelt werden.
- Viele Anwendungen (Längenberechnung, Sätze und Beweise, Mittelwerte, Faltgeometrie, Optik)



# Kapitel 7: Ähnlichkeit

## Aufbau:

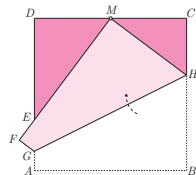
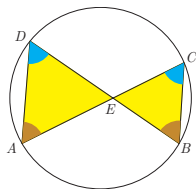
- Verhältnisse und Proportionen
- Ähnliche Figuren
- $\Rightarrow$  Strahlensätze
- $\Rightarrow$  Zentrische Streckung

## Besonderes:

- Die drei Hauptteile sind unabhängig voneinander und können in beliebiger Reihenfolge behandelt werden.
- Viele Anwendungen (Längenberechnung, Sätze und Beweise, Mittelwerte, Faltgeometrie, Optik)

## Weiterführende Aufgaben:

- Goldener Schnitt
- Logik



# Kapitel 8: Trigonometrie

## Aufbau (klassisch):

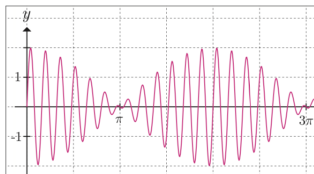
- Rechtwinklige Dreiecke
- Funktionswerte beliebiger Winkel
- Allgemeine Dreiecke
- Additionstheoreme ▶ ③
- Graphen von trigonometrischen Funktionen ▶
- Goniometrie

# Kapitel 8: Trigonometrie

## Aufbau (klassisch):

- Rechtwinklige Dreiecke
- Funktionswerte beliebiger Winkel
- Allgemeine Dreiecke
- Additionstheoreme ▶ ③
- Graphen von trigonometrischen Funktionen ▶
- Goniometrie

$$f(x) = \sin(13x) + \sin(12x)$$



# Kapitel 8: Trigonometrie

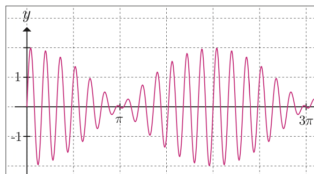
## Aufbau (klassisch):

- Rechtwinklige Dreiecke
- Funktionswerte beliebiger Winkel
- Allgemeine Dreiecke
- Additionstheoreme ▶ ③
- Graphen von trigonometrischen Funktionen ▶
- Goniometrie

## Besonderes: Viele Anwendungen, z.B.

- Biorhythmus
- Ebbe und Flut
- Einparken
- Vermessung (Vorwärtseinschneiden) ▶

$$f(x) = \sin(13x) + \sin(12x)$$





# Kapitel 8: Trigonometrie

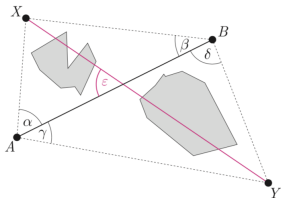
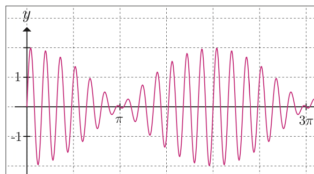
## Aufbau (klassisch):

- Rechtwinklige Dreiecke
- Funktionswerte beliebiger Winkel
- Allgemeine Dreiecke
- Additionstheoreme ▶ ③
- Graphen von trigonometrischen Funktionen ▶
- Goniometrie

## Besonderes: Viele Anwendungen, z.B.

- Biorhythmus
- Ebbe und Flut
- Einparken
- Vermessung (Vorwärtseinschneiden) ▶

$$f(x) = \sin(13x) + \sin(12x)$$



## Kapitel 8: Trigonometrie

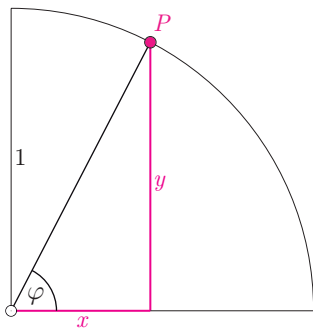
Weiterführende Aufgaben: Berechnung von trigonometrischen Werten

- Sehnentafeln von Ptolemaios
- Potenzreihen
- CORDIC-Algorithmus zur Berechnung von  $y = \sin(\varphi)$  und  $x = \cos(\varphi)$  ►

# Kapitel 8: Trigonometrie

## Weiterführende Aufgaben: Berechnung von trigonometrischen Werten

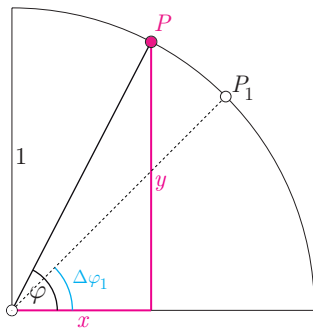
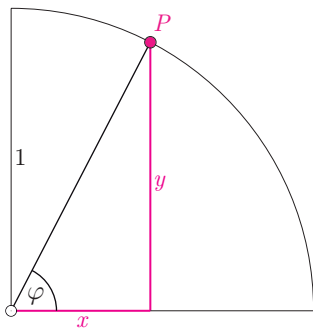
- Sehnentafeln von Ptolemaios
- Potenzreihen
- CORDIC-Algorithmus zur Berechnung von  $y = \sin(\varphi)$  und  $x = \cos(\varphi)$  ►



# Kapitel 8: Trigonometrie

## Weiterführende Aufgaben: Berechnung von trigonometrischen Werten

- Sehnentafeln von Ptolemaios
- Potenzreihen
- CORDIC-Algorithmus zur Berechnung von  $y = \sin(\varphi)$  und  $x = \cos(\varphi)$  ▶

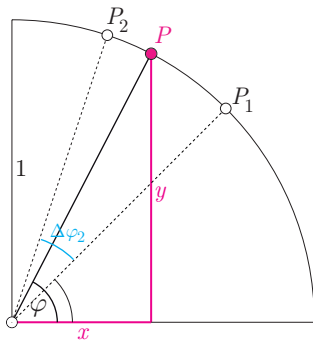
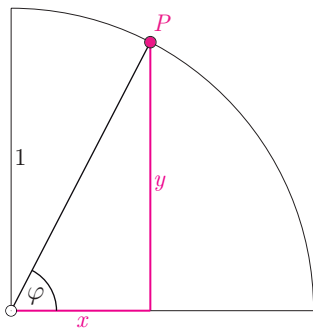


$$\Delta\varphi_1 = \arctan(1) = 45^\circ$$

# Kapitel 8: Trigonometrie

## Weiterführende Aufgaben: Berechnung von trigonometrischen Werten

- Sehnentafeln von Ptolemaios
- Potenzreihen
- CORDIC-Algorithmus zur Berechnung von  $y = \sin(\varphi)$  und  $x = \cos(\varphi)$  ▶

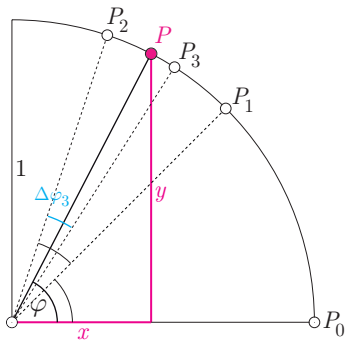
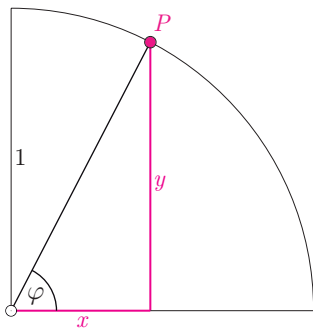


$$\Delta\varphi_2 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26.5^\circ$$

# Kapitel 8: Trigonometrie

## Weiterführende Aufgaben: Berechnung von trigonometrischen Werten

- Sehnentafeln von Ptolemaios
- Potenzreihen
- CORDIC-Algorithmus zur Berechnung von  $y = \sin(\varphi)$  und  $x = \cos(\varphi)$  ▶



$$\Delta\varphi_3 = \arctan\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14.0^\circ$$

# Kapitel 9: Räumliche Geometrie

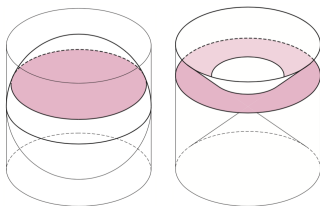
## Aufbau:

- Vorstellen im Raum
- Darstellen in Schrägbildern
- Konstruieren in Schrägbildern
- Stereometrie
  - Quader, Prismen, Zylinder
  - Prinzip von Cavalieri
  - Pyramiden, Kegel
  - Kugel ►

# Kapitel 9: Räumliche Geometrie

## Aufbau:

- Vorstellen im Raum
- Darstellen in Schrägbildern
- Konstruieren in Schrägbildern
- Stereometrie
  - Quader, Prismen, Zylinder
  - Prinzip von Cavalieri
  - Pyramiden, Kegel
  - Kugel ▶

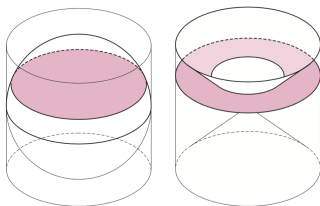




# Kapitel 9: Räumliche Geometrie

## Aufbau:

- Vorstellen im Raum
- Darstellen in Schrägbildern
- Konstruieren in Schrägbildern
- Stereometrie
  - Quader, Prismen, Zylinder
  - Prinzip von Cavalieri
  - Pyramiden, Kegel
  - Kugel ▶



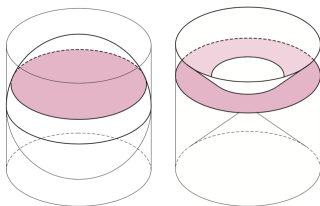
## Besonderes: Viele Aufgaben zur Raumvorstellung, z.B.

- Mentale Rotation
- Deltaeder
- Schnittfiguren in Würfeln und Prismen
- Knoten ▶

# Kapitel 9: Räumliche Geometrie

## Aufbau:

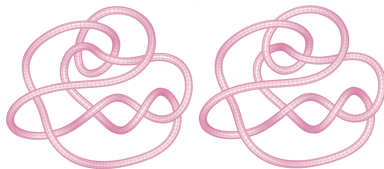
- Vorstellen im Raum
- Darstellen in Schrägbildern
- Konstruieren in Schrägbildern
- Stereometrie
  - Quader, Prismen, Zylinder
  - Prinzip von Cavalieri
  - Pyramiden, Kegel
  - Kugel ▶



## Besonderes: Viele Aufgaben zur Raumvorstellung, z.B.

- Mentale Rotation
- Deltaeder
- Schnittfiguren in Würfeln und Prismen
- Knoten ▶

Welcher ist der Unknoten?



# Kapitel 9: Räumliche Geometrie

## Weiterführende Aufgaben:

### • Räumliches Konstruieren mit Ebenenlineal und Kugelzirkel ►

Im Raum kann man nicht direkt mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir stellen uns deshalb zusätzliche räumliche Werkzeuge vor, mit welchen wir räumliche Konstruktionen ausführen können: ein «Ebenenlineal» und einen «Kugelzirkel».

Damit lassen sich folgende räumliche Konstruktionen ausführen:

- (1) Gerade durch zwei gegebene Punkte konstruieren (Lineal)
- (2) Ebene durch drei gegebene Punkte konstruieren (Ebenenlineal)
- (3) Kugel um einen Punkt mit vorgegebenem Radius konstruieren (Kugelzirkel)
- (4) Schnittlinien von Flächen (Ebenen und Kugeln) konstruieren
- (5) Punkte auf Linien und Flächen setzen
- (6) In einer Ebene konstruieren (Zirkel und Lineal)

# Kapitel 9: Räumliche Geometrie

## Weiterführende Aufgaben:

### • Räumliches Konstruieren mit Ebenenlineal und Kugelizirkel ►

Im Raum kann man nicht direkt mit Zirkel und Lineal konstruieren. Wir stellen uns deshalb zusätzliche räumliche Werkzeuge vor, mit welchen wir räumliche Konstruktionen ausführen können: ein «Ebenenlineal» und einen «Kugelizirkel».

Damit lassen sich folgende räumliche Konstruktionen ausführen:

- (1) Gerade durch zwei gegebene Punkte konstruieren (Lineal)
- (2) Ebene durch drei gegebene Punkte konstruieren (Ebenenlineal)
- (3) Kugel um einen Punkt mit vorgegebenem Radius konstruieren (Kugelizirkel)
- (4) Schnittlinien von Flächen (Ebenen und Kugeln) konstruieren
- (5) Punkte auf Linien und Flächen setzen
- (6) In einer Ebene konstruieren (Zirkel und Lineal)

### Beispiel:

Gegeben: Ebene  $E$ , Gerade  $g$  und Punkt  $P$

Konstruiere die Gerade  $t$ , welche parallel zu  $E$  liegt,  $g$  schneidet und durch  $P$  geht.

# Kapitel 10: Vektoren

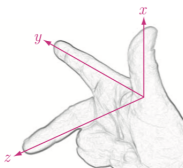
## Aufbau:

- Elementare Vektoroperationen (graphisch)
- Vektoren in Komponentendarstellung
- Grundoperationen (rechnerisch)
- Skalar-, Vektor- und Spatprodukt ▶

# Kapitel 10: Vektoren

## Aufbau:

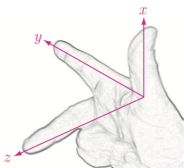
- Elementare Vektoroperationen (graphisch)
- Vektoren in Komponentendarstellung
- Grundoperationen (rechnerisch)
- Skalar-, Vektor- und Spatprodukt ►



# Kapitel 10: Vektoren

## Aufbau:

- Elementare Vektoroperationen (graphisch)
- Vektoren in Komponentendarstellung
- Grundoperationen (rechnerisch)
- Skalar-, Vektor- und Spatprodukt ►



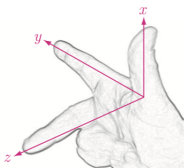
## Besonderes: Anwendungen auch ausserhalb der Mathematik

- Boot im Fluss, Flugzeug im Wind
- CH<sub>4</sub>-Molekül und Symmetrien
- Planarität der C-Atome im Benzolmolekül
- Drehmoment, Lorentz-Kraft ►
- Korrelation von Latein-, Mathematik- und Physiknoten

# Kapitel 10: Vektoren

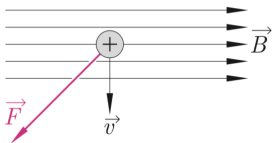
## Aufbau:

- Elementare Vektoroperationen (graphisch)
- Vektoren in Komponentendarstellung
- Grundoperationen (rechnerisch)
- Skalar-, Vektor- und Spatprodukt ▶



## Besonderes: Anwendungen auch ausserhalb der Mathematik

- Boot im Fluss, Flugzeug im Wind
- CH<sub>4</sub>-Molekül und Symmetrien
- Planarität der C-Atome im Benzolmolekül
- Drehmoment, Lorentz-Kraft ▶
- Korrelation von Latein-, Mathematik- und Physiknoten



$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$$



## Kapitel 10: Vektoren

### Weiterführende Aufgaben: Rechnen mit Matrizen und Vektoren

- Ziel: Erste Begegnung mit Matrizen und einfachen Rechenregeln

## Kapitel 10: Vektoren

**Weiterführende Aufgaben:** Rechnen mit Matrizen und Vektoren

- Ziel: Erste Begegnung mit Matrizen und einfachen Rechenregeln
- Exemplarische Anwendungen

# Kapitel 10: Vektoren

## Weiterführende Aufgaben: Rechnen mit Matrizen und Vektoren

- Ziel: Erste Begegnung mit Matrizen und einfachen Rechenregeln
- Exemplarische Anwendungen
  - Beispiel aus der Abbildungsgeometrie:

Erzeugung von perfekten Dreiecken (d.h. rechtwinkligen Gitter-Dreiecken mit ganzzahligen Seiten) im Raum z.B. mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{pmatrix}$  mittels der Eckpunkte  $(0, 0, 0)$ ,  $(12, 0, 0)$  und  $(0, 5, 0)$

# Kapitel 10: Vektoren

## Weiterführende Aufgaben: Rechnen mit Matrizen und Vektoren

- Ziel: Erste Begegnung mit Matrizen und einfachen Rechenregeln
- Exemplarische Anwendungen
  - Beispiel aus der Abbildungsgeometrie:

Erzeugung von perfekten Dreiecken (d.h. rechtwinkligen Gitter-Dreiecken mit ganzzahligen Seiten) im Raum z.B. mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \end{pmatrix}$  mittels der Eckpunkte  $(0, 0, 0)$ ,  $(12, 0, 0)$  und  $(0, 5, 0)$

- Beispiel aus der Populationsdynamik ► 8:

Wachstum von Kaninchenpaaren nach Fibonacci mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  und dem Anfangsvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

# Kapitel 11: Analytische Geometrie

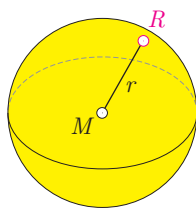
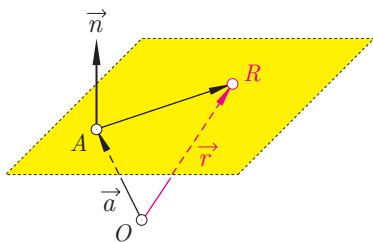
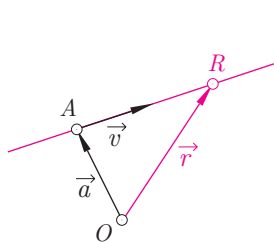
## Aufbau (klassisch):

- Geraden und Kreise in der Ebene (nicht vektoriell)
- Geraden im Raum ▶
- Ebenen ▶
- Kugeln ▶

# Kapitel 11: Analytische Geometrie

## Aufbau (klassisch):

- Geraden und Kreise in der Ebene (nicht vektoriell)
- Geraden im Raum ▶
- Ebenen ▶
- Kugeln ▶



# Kapitel 11: Analytische Geometrie

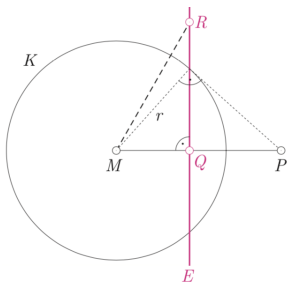
## Besonderes:

- Viele Lernaufgaben, um wesentliche Konzepte selbstständig zu erarbeiten
- Beispiele von Maturaufgaben
- Zum Vertiefen: Pol und Polarebene ►

# Kapitel 11: Analytische Geometrie

## Besonderes:

- Viele Lernaufgaben, um wesentliche Konzepte selbstständig zu erarbeiten
- Beispiele von Maturaufgaben
- Zum Vertiefen: Pol und Polarebene ▶

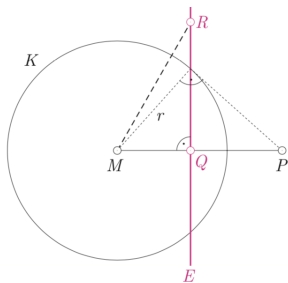




# Kapitel 11: Analytische Geometrie

## Besonderes:

- Viele Lernaufgaben, um wesentliche Konzepte selbstständig zu erarbeiten
- Beispiele von Maturaufgaben
- Zum Vertiefen: Pol und Polarebene ▶



## Weiterführende Aufgaben:

- Parameterdarstellungen von Raumkurven ▶ 9

# Leitgedanken

Klassische Aufgabensammlungen:

# Leitgedanken

## Klassische Aufgabensammlungen:

- Die „Theorie“ wird vorausgesetzt und impliziert eine vorgängige diesbezügliche Erarbeitung.

# Leitgedanken

## Klassische Aufgabensammlungen:

- Die „Theorie“ wird vorausgesetzt und impliziert eine vorgängige diesbezügliche Erarbeitung.
- Eine klassische Aufgabensammlung hat oft den Charakter von **Übungen, um die Theorie anzuwenden und die Inhalte zu festigen.**

# Leitgedanken

## Klassische Aufgabensammlungen:

- Die „Theorie“ wird vorausgesetzt und impliziert eine vorgängige diesbezügliche Erarbeitung.
- Eine klassische Aufgabensammlung hat oft den Charakter von **Übungen, um die Theorie anzuwenden und die Inhalte zu festigen.**

## Geometrie 1 & 2:

# Leitgedanken

## Klassische Aufgabensammlungen:

- Die „Theorie“ wird vorausgesetzt und impliziert eine vorgängige diesbezügliche Erarbeitung.
- Eine klassische Aufgabensammlung hat oft den Charakter von **Übungen, um die Theorie anzuwenden und die Inhalte zu festigen.**

## Geometrie 1 & 2:

- Die Theorie ist oft eingebettet und die entsprechenden Aufgaben werden als **Lernaufgaben** bezeichnet, welche entweder selbstständig oder allenfalls teilweise im Klassenunterricht erarbeitet werden können.

# Leitgedanken

## Klassische Aufgabensammlungen:

- Die „Theorie“ wird vorausgesetzt und impliziert eine vorgängige diesbezügliche Erarbeitung.
- Eine klassische Aufgabensammlung hat oft den Charakter von **Übungen, um die Theorie anzuwenden und die Inhalte zu festigen.**

## Geometrie 1 & 2:

- Die Theorie ist oft eingebettet und die entsprechenden Aufgaben werden als **Lernaufgaben** bezeichnet, welche entweder selbstständig oder allenfalls teilweise im Klassenunterricht erarbeitet werden können.
- Die Aufgabensammlung hat vermehrt den Charakter von **entdeckendem Üben mit dem Ziel, die Theorie zu erarbeiten.**

# Leitgedanken

## Klassische Aufgabensammlungen:

- Die „Theorie“ wird vorausgesetzt und impliziert eine vorgängige diesbezügliche Erarbeitung.
- Eine klassische Aufgabensammlung hat oft den Charakter von **Übungen, um die Theorie anzuwenden und die Inhalte zu festigen.**

## Geometrie 1 & 2:

- Die Theorie ist oft eingebettet und die entsprechenden Aufgaben werden als **Lernaufgaben** bezeichnet, welche entweder selbstständig oder allenfalls teilweise im Klassenunterricht erarbeitet werden können.
- Die Aufgabensammlung hat vermehrt den Charakter von **entdeckendem Üben mit dem Ziel, die Theorie zu erarbeiten.**
- Daneben hat es natürlich auch **viele klassische Übungen, um das vorher Erarbeitete zu festigen und anzuwenden.**



# Leitgedanken

Zum „Geist“ der beiden Bände:

# Leitgedanken

Zum „Geist“ der beiden Bände:

- Der Geometrieunterricht im Gymnasium kann (und soll auch) nicht deduktiv aufgebaut sein.

# Leitgedanken

Zum „Geist“ der beiden Bände:

- Der Geometrieunterricht im Gymnasium kann (und soll auch) nicht deduktiv aufgebaut sein.
- Heuristisches Vorgehen (Analysieren, Vermuten, Begründen, Reflektieren, ...) soll im Vordergrund sein.

# Leitgedanken

Zum „Geist“ der beiden Bände:

- Der Geometrieunterricht im Gymnasium kann (und soll auch) nicht deduktiv aufgebaut sein.
- Heuristisches Vorgehen (Analysieren, Vermuten, Begründen, Reflektieren, ...) soll im Vordergrund sein.
- An vielen Stellen soll aber auch ein Beweisbedürfnis entwickelt werden. Geometrische Sätze werden dann - aufbauend auf erworbenen Kenntnissen - bewiesen. (im Sinne von Freudenthals „lokalem Ordnen“)

# Leitgedanken

Zum „Geist“ der beiden Bände:

- Der Geometrieunterricht im Gymnasium kann (und soll auch) nicht deduktiv aufgebaut sein.
- Heuristisches Vorgehen (Analysieren, Vermuten, Begründen, Reflektieren, ...) soll im Vordergrund sein.
- An vielen Stellen soll aber auch ein Beweisbedürfnis entwickelt werden. Geometrische Sätze werden dann - aufbauend auf erworbenen Kenntnissen - bewiesen. (im Sinne von Freudenthals „lokalem Ordnen“)
- Die Geometrie eignet sich vorzüglich, um Problemlösefähigkeiten zu erwerben und diesbezügliche Strategien zu üben.

# Leitgedanken

## Zum „Geist“ der beiden Bände:

- Der Geometrieunterricht im Gymnasium kann (und soll auch) nicht deduktiv aufgebaut sein.
- Heuristisches Vorgehen (Analysieren, Vermuten, Begründen, Reflektieren, ...) soll im Vordergrund sein.
- An vielen Stellen soll aber auch ein Beweisbedürfnis entwickelt werden. Geometrische Sätze werden dann - aufbauend auf erworbenen Kenntnissen - bewiesen. (im Sinne von Freudenthals „lokalem Ordnen“)
- Die Geometrie eignet sich vorzüglich, um Problemlösefähigkeiten zu erwerben und diesbezügliche Strategien zu üben.
- Das Aufgabenmaterial ist thematisch sehr breit gefächert und soll auch Individualisierung bzw. Spezialisierung ermöglichen.

## Beispiele aus Geometrie 2

Die Beispiele eignen sich z.T. auch für kleinere Unterrichtsprojekte.

- ➊ Streckendrittung durch Papierfalten mit dem Satz von Haga
- ➋ Orientierung mit dem GPS
- ➌ Additionstheoreme selber herleiten
- ➍ Spatprodukt aus dem Skalar- und Vektorprodukt entwickeln
- ➎ Silberne Rechtecke untersuchen
- ➏ Näherungskonstruktion für Winkeldrittung untersuchen
- ➐ „edle“ und „perfekte“ Gitterdreiecke untersuchen
- ➑ Kaninchenpopulation nach Fibonacci mit Hilfe einer Matrix untersuchen
- ➒ Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer Schraubenlinie untersuchen