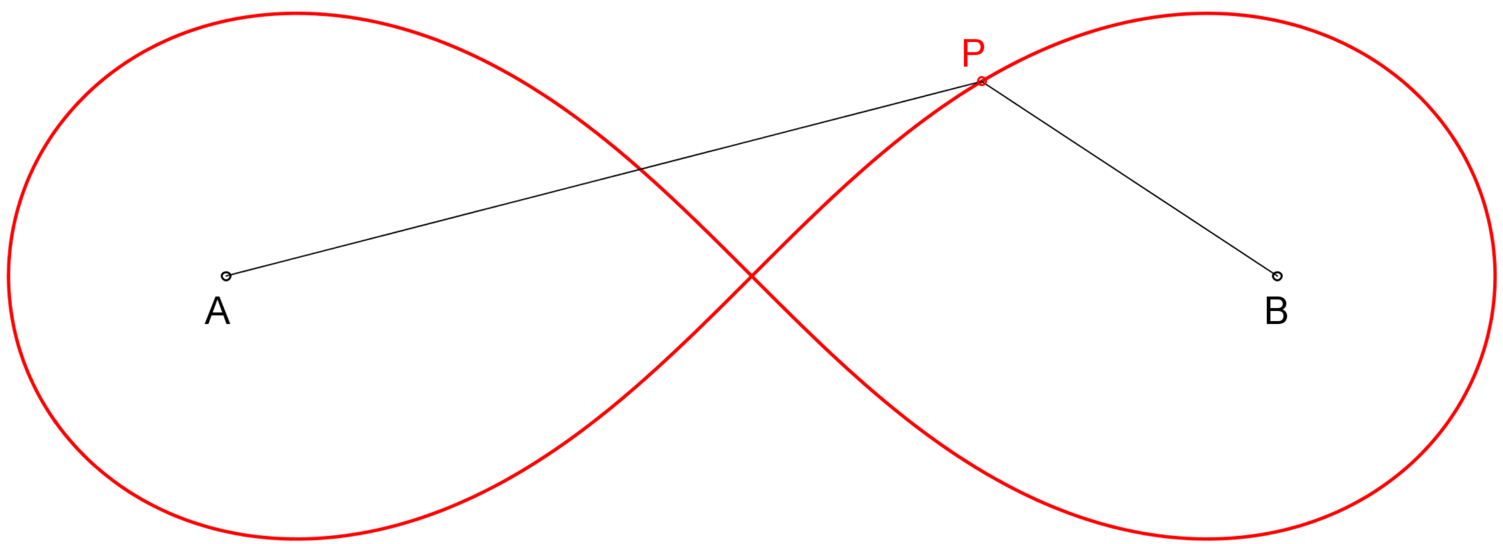
Die Bernoulli‘sche Lemniskate im Unterricht

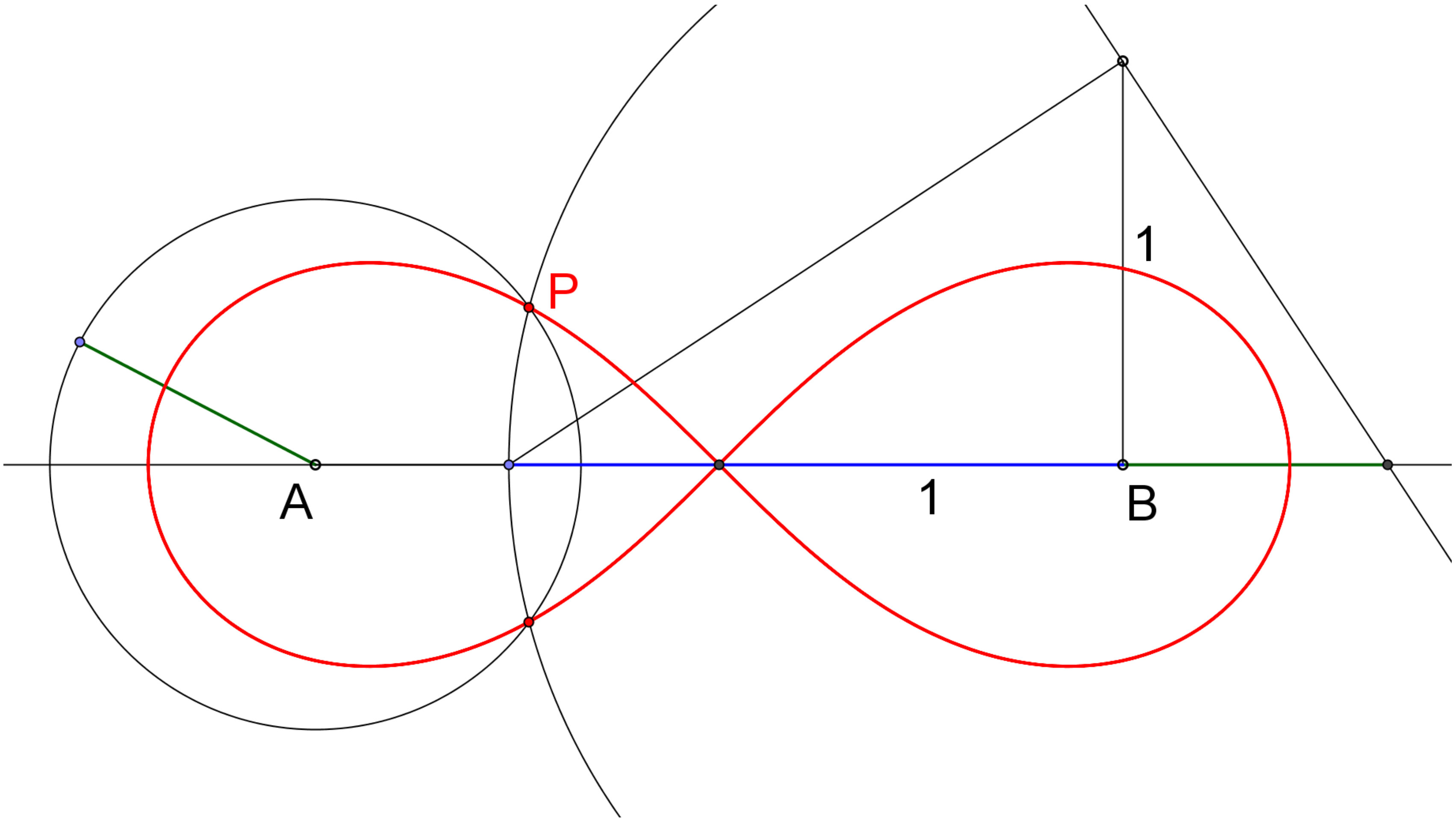
Inhalt

I Die BL als geometrischer Ort

A und B sind zwei fixe Punkte im Abstand 2.
Die Menge aller Punkte P, für welche
$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ gilt, ist eine BL.



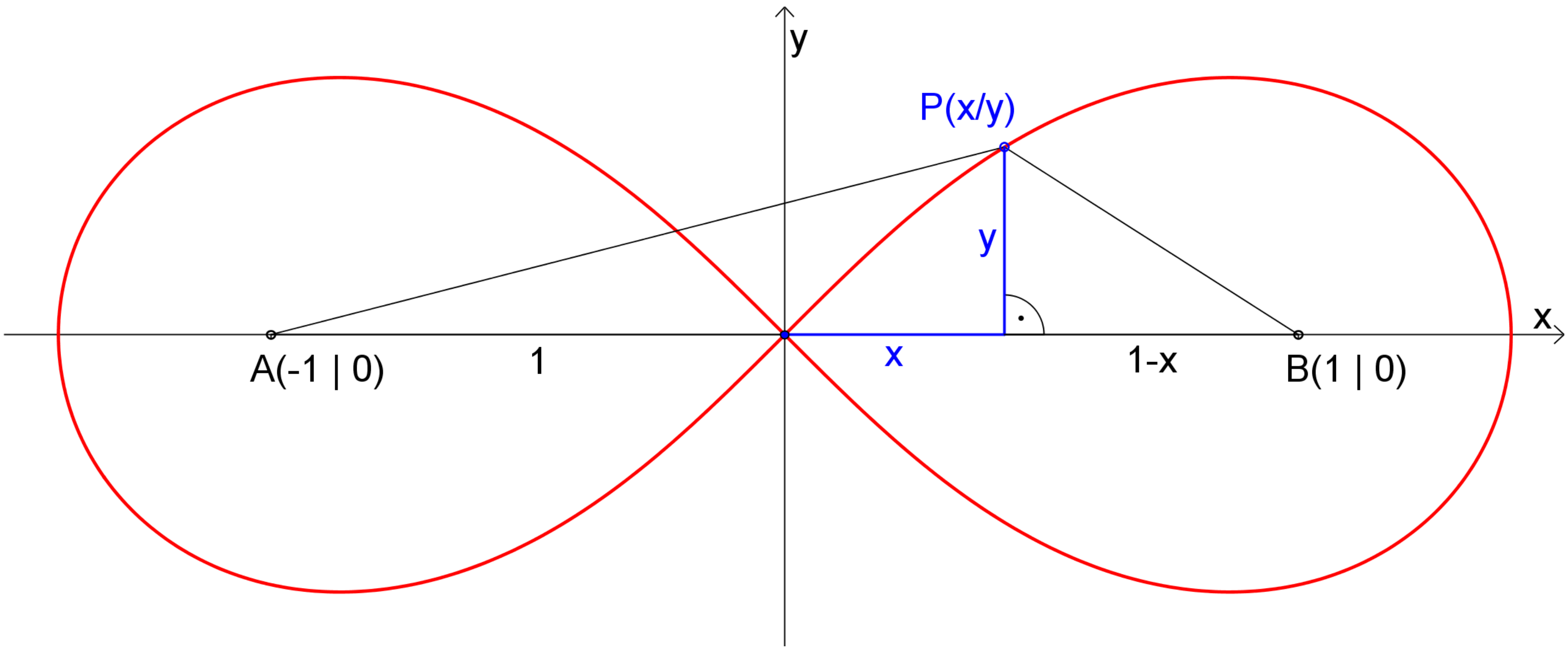
Konstruktion der BL-Punkte P mit Hilfe des Höhensatzes



II Gleichungen einer BL

- Koordinatenformen
- Polarformen

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$



Koordinatengleichung:

$$1 = \sqrt{(1+x)^2+y^2} \cdot \sqrt{(1-x)^2+y^2}$$
$$1 = ((1+x)^2+y^2) \cdot ((1-x)^2+y^2)$$
$$1 = (1+x)^2(1-x)^2 + (1+x)^2y^2 + (1-x)^2y^2 + y^4$$
$$1 = (1-x^2)^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 + y^4$$
$$1 = 1 - 2x^2 + x^4 + 2y^2 + 2x^2y^2 + y^4$$
$$2x^2 - 2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\boxed{2(x^2 - y^2) = (x^2+y^2)^2}$$

Übungen:

- $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$, mit $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ liefert
  $2c^2(x^2 - y^2) = (x^2+y^2)^2$,
  also insbesondere für $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
  $\boxed{x^2 - y^2 = (x^2+y^2)^2}$

- $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 2c^2$, mit $A(-c/-c)$ und $B(c/c)$ liefert
  $8c^2xy = (x^2+y^2)^2$,
  also insbesondere für $c^2 = \frac{1}{8}$:
  $\boxed{xy = (x^2+y^2)^2}$

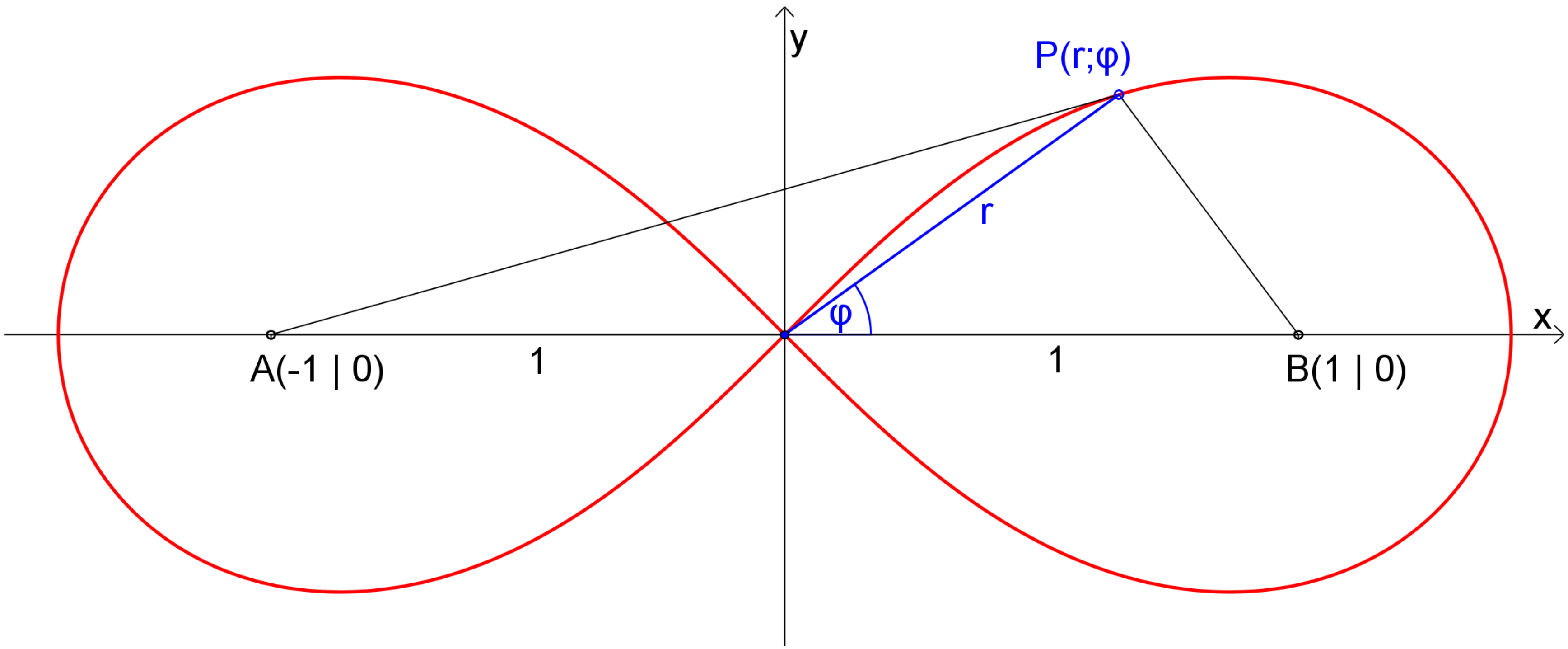
- Begründe die Symmetrien rechnerisch.

- $P(x/y)$ sei ein Punkt auf der Lemniskate $2(x^2 - y^2) = (x^2+y^2)^2$.

  Berechne y, falls $x = 1$.
  (→Biquadratische Gleichung)

  Für welche y-Werte wird die Diskriminante der Lemniskatengleichung null?
  (→Extremalpunkte)

$$1 = \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180° - \varphi)} \cdot \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$



Polarform:

$$1 = \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180° - \varphi)} \cdot \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$
$$1 = \sqrt{1 + r^2 + 2rcos(\varphi)} \cdot \sqrt{1 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$
$$1 = (1 + r^2)^2 - (2rcos(\varphi))^2$$
$$0 = 2r^2 + r^4 - 4r^2cos^2(\varphi) = r^2(r^2 + 2 - 4cos^2(\varphi))$$

liefert:

$$\boxed{r(\varphi) = \sqrt{4cos^2(\varphi) - 2} = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}}$$

Übungen:

- $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$, mit $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ liefert $r(\varphi) = c \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$,

  also insbesondere für $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

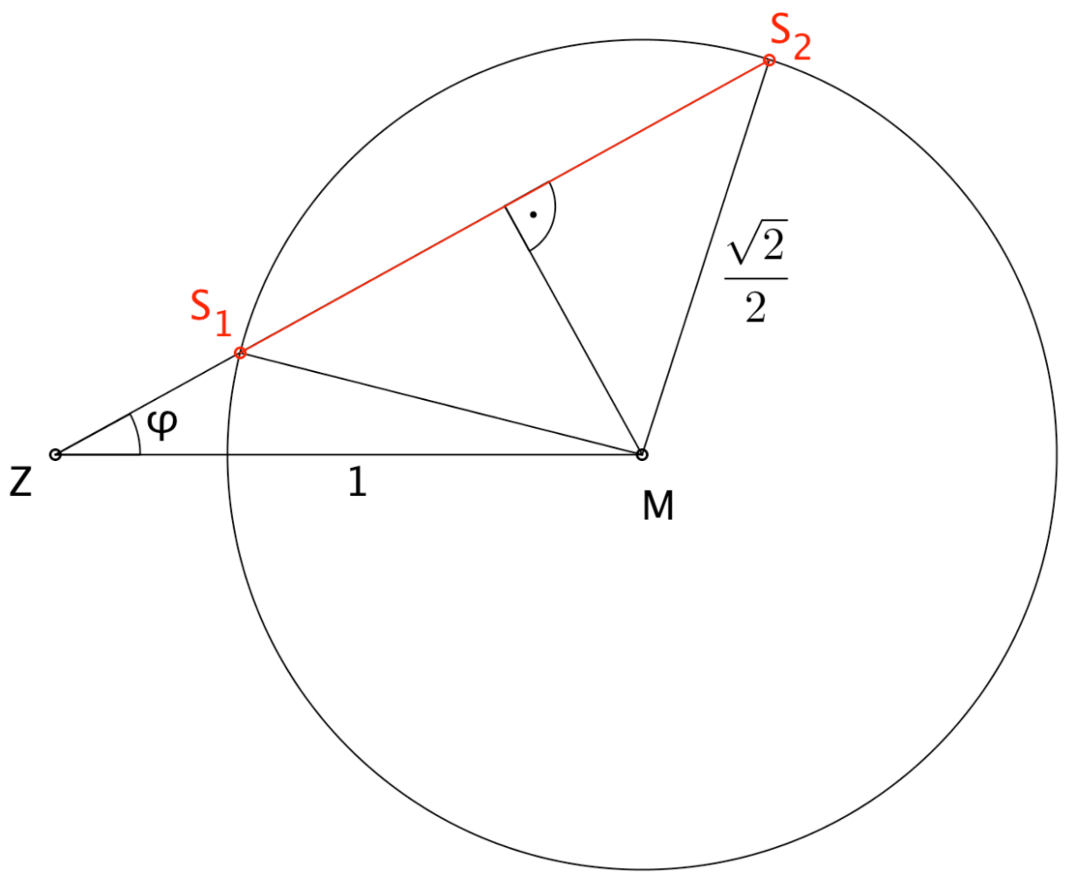
  $$\boxed{r(\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)}}$$

- Um 45° gedreht:

  $$\boxed{r(\varphi) = \sqrt{\cos(2(\varphi - 45°))} = \sqrt{\sin(2\varphi)}}$$

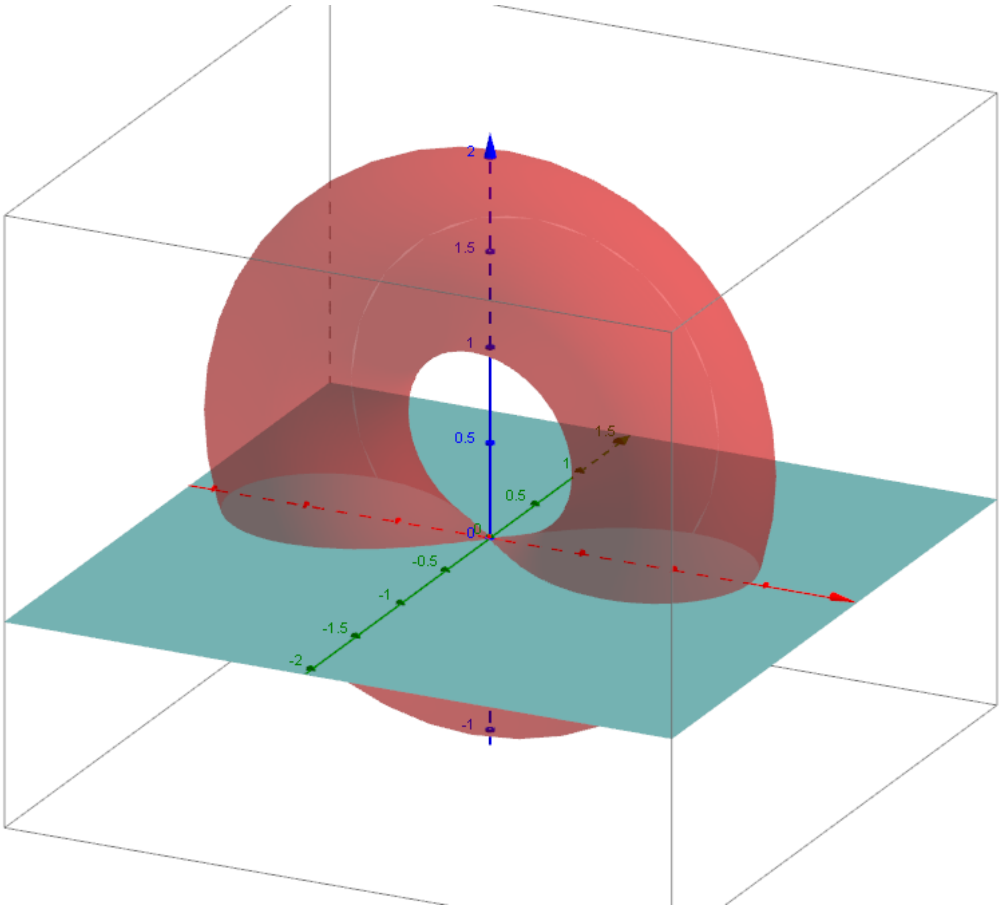
- Begründe die Symmetrien.
- Zeige in der Figur unten, dass

$$\overline{S_1 S_2} = \sqrt{2(1 - sin^2(\varphi))}\ \left(= \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}\ !\right)$$



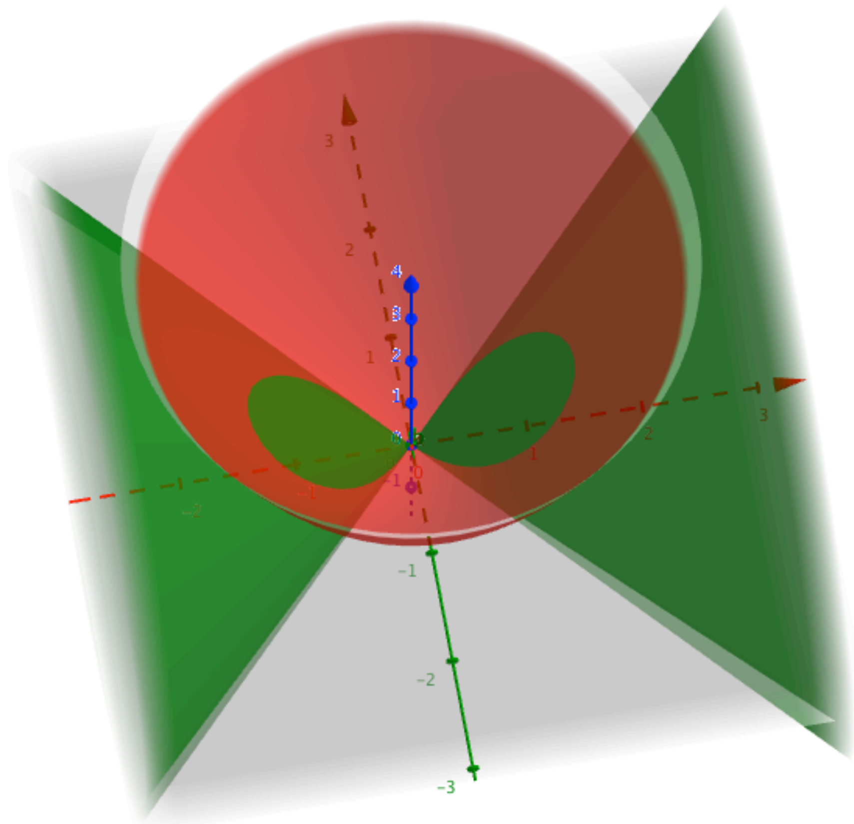
III Die BL als Schnittfigur

Torusschnitt:

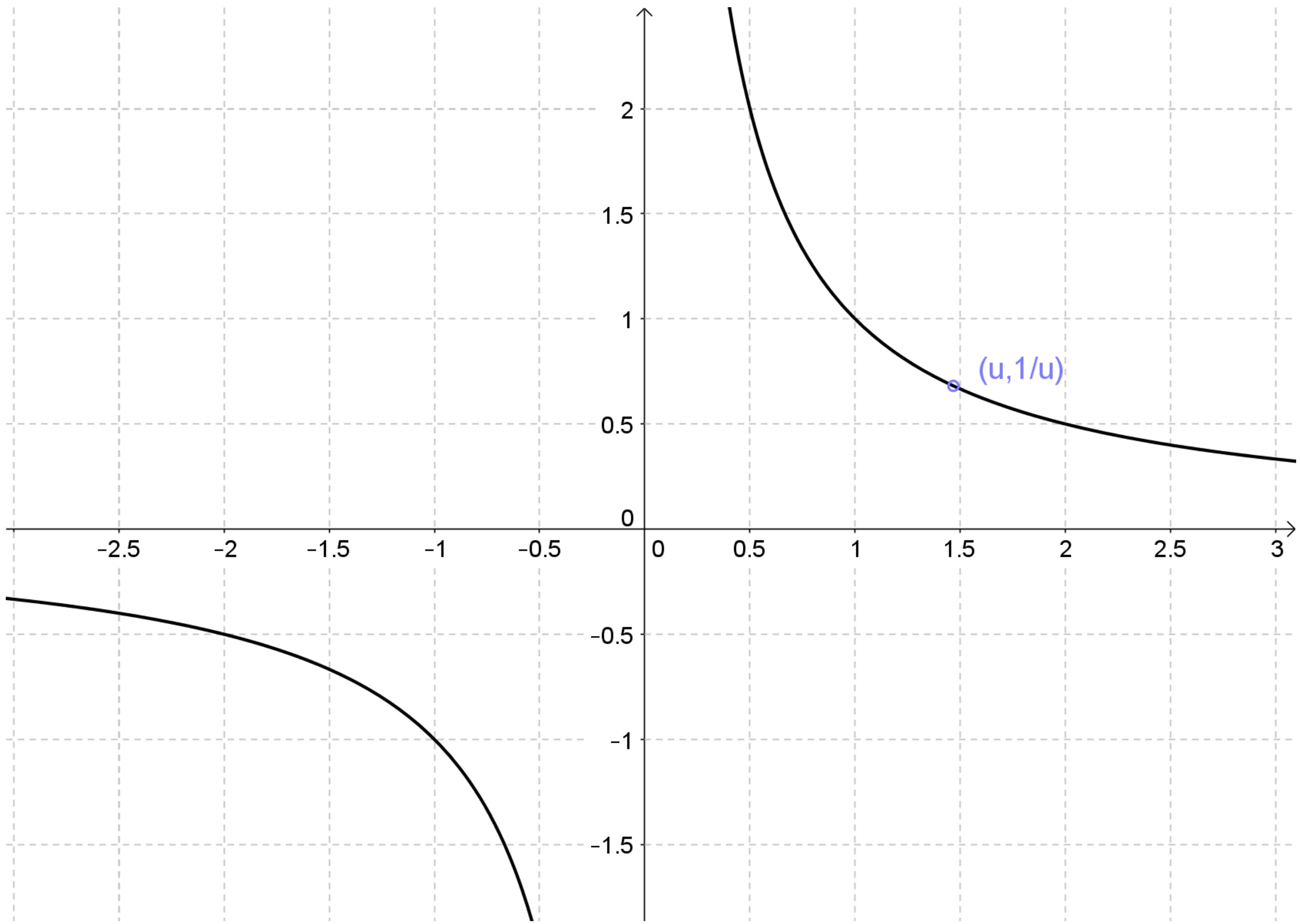


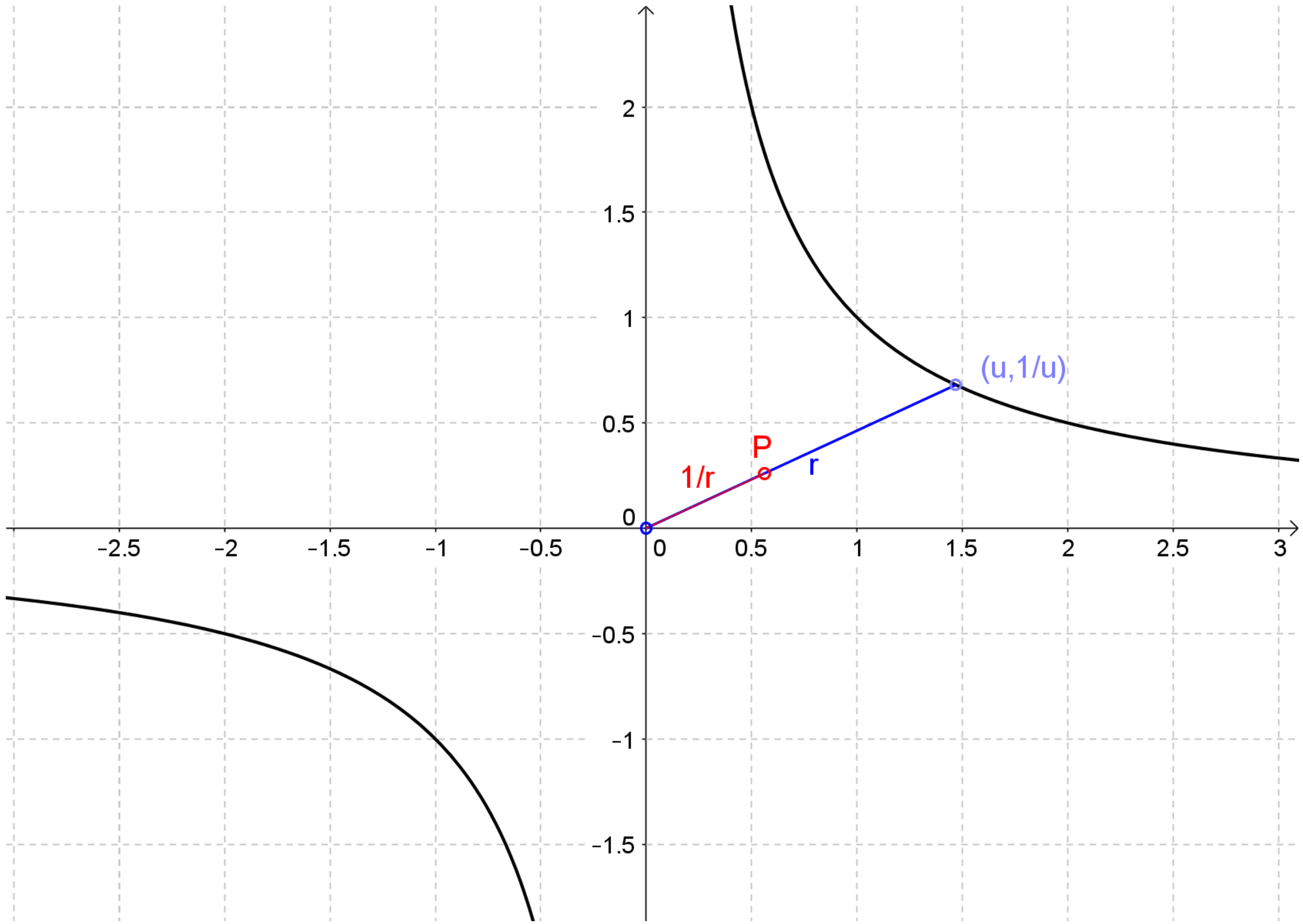
Kegel $z^2 = x^2 - y^2$

mit Paraboloid $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + y^2)$ schneiden:

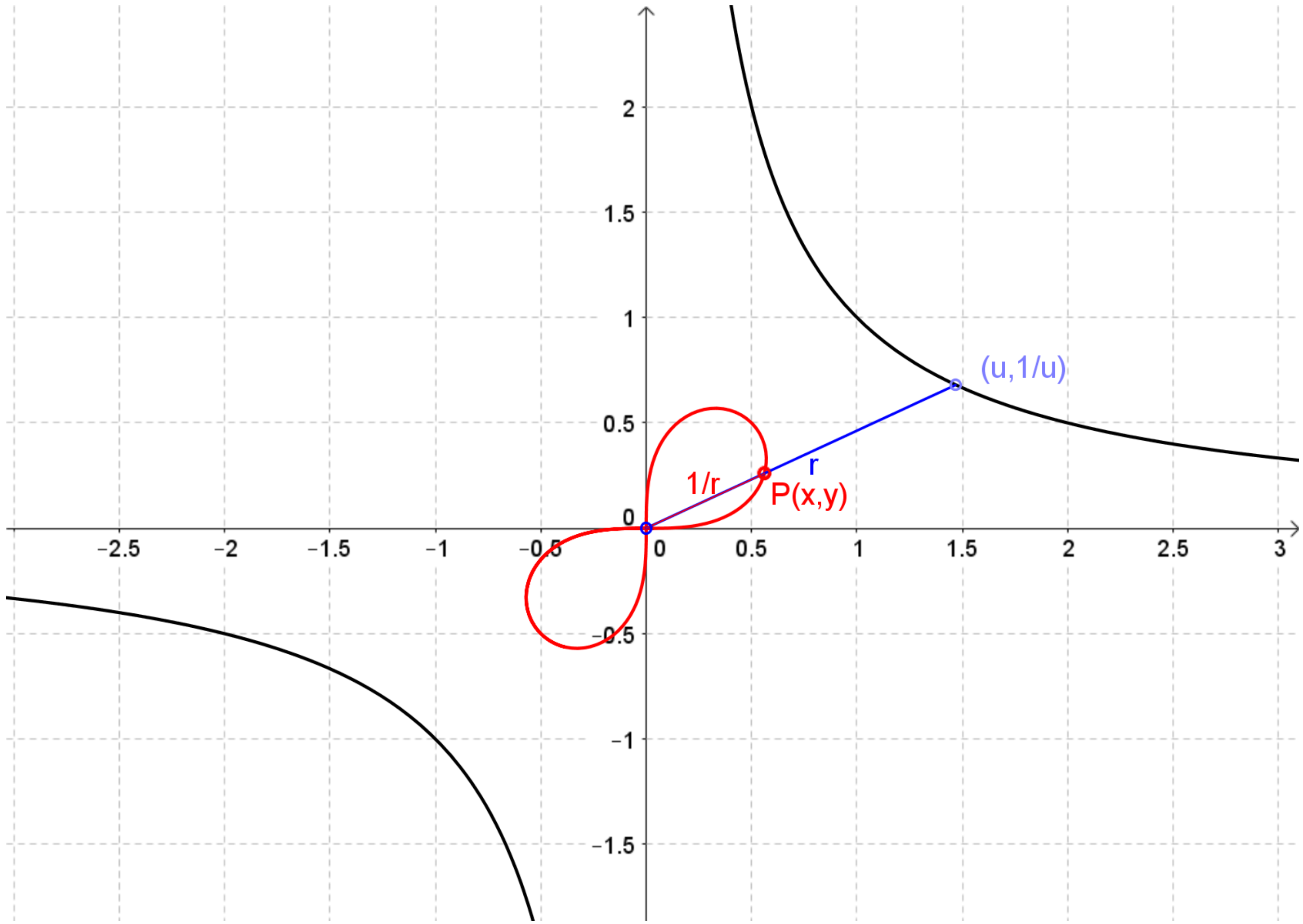


IV „Kehrwerte von Kehrwerten“





(u,1/u)
P
1/r
r
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


(u,1/u)
r
1/r
P(x,y)
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Berechnung:

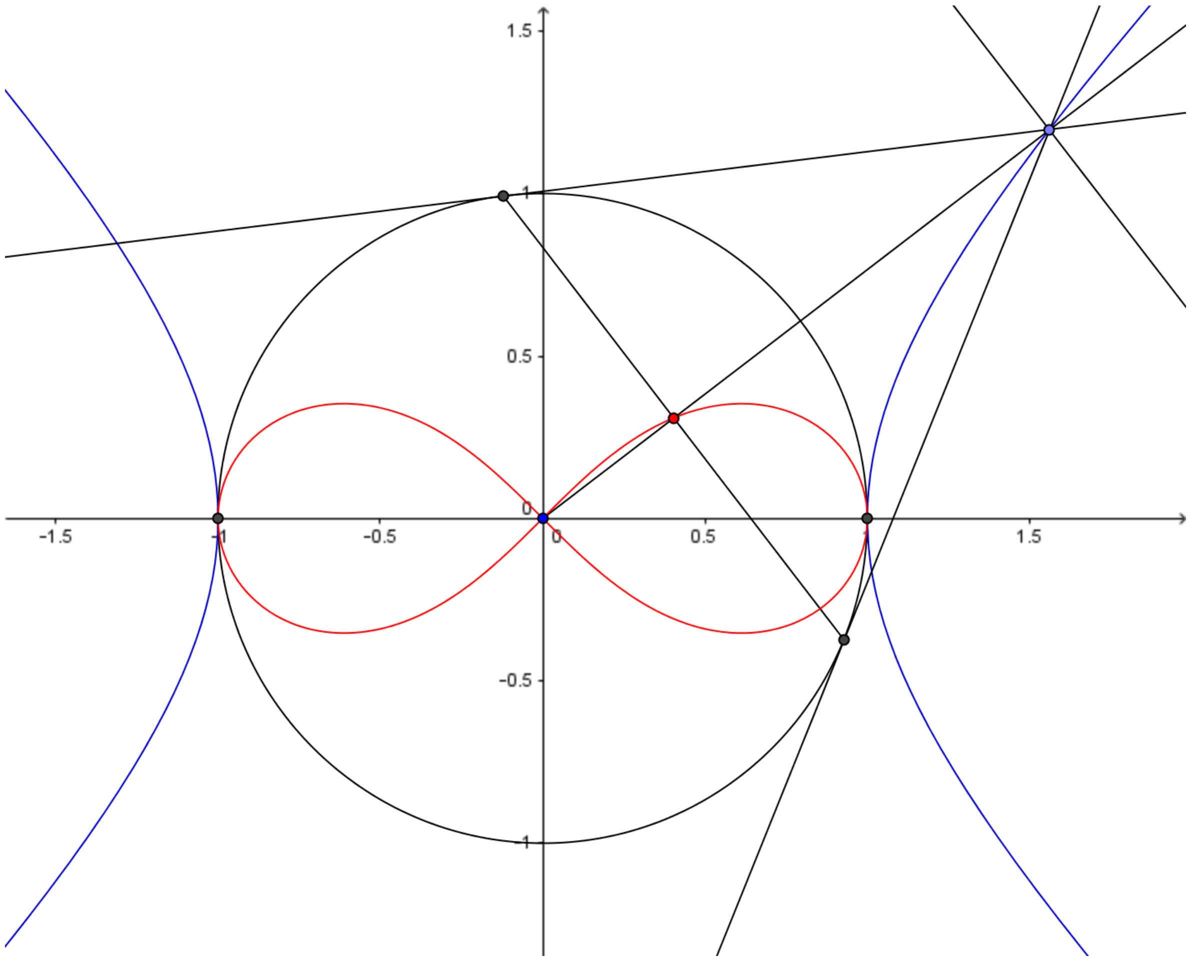
$$r = \sqrt{u^2 + \frac{1}{u^2}} = \sqrt{\frac{u^4+1}{u^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{u^2}{u^4+1}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

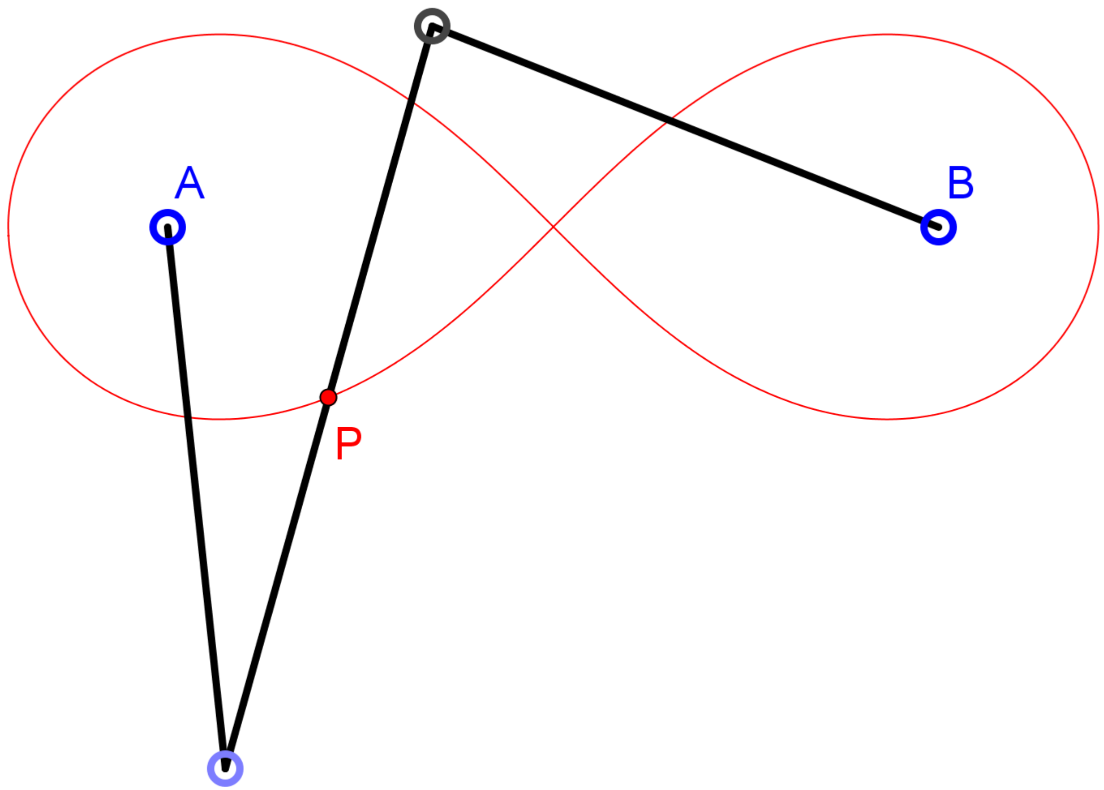
Mit $\frac{x}{y} = \frac{u}{{}^1/_u} = u^2$ folgt $\frac{{}^x/_y}{({}^x/_y)^2+1} = x^2 + y^2$.

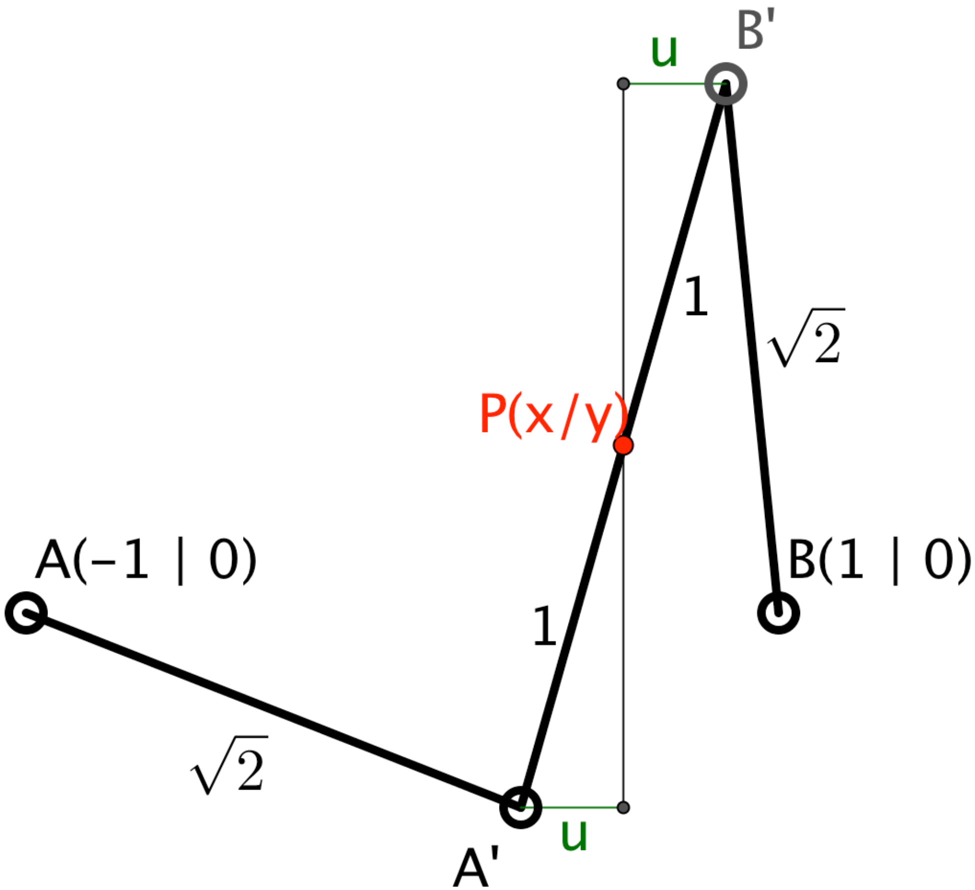
Also $x^2 + y^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \;\Longrightarrow (x^2+y^2)^2 = xy$ BL!

Invertiert man eine gleichschenklige Hyperbel an einem Zentralkreis, so entsteht eine BL.



V Mechanische Konstruktion einer BL

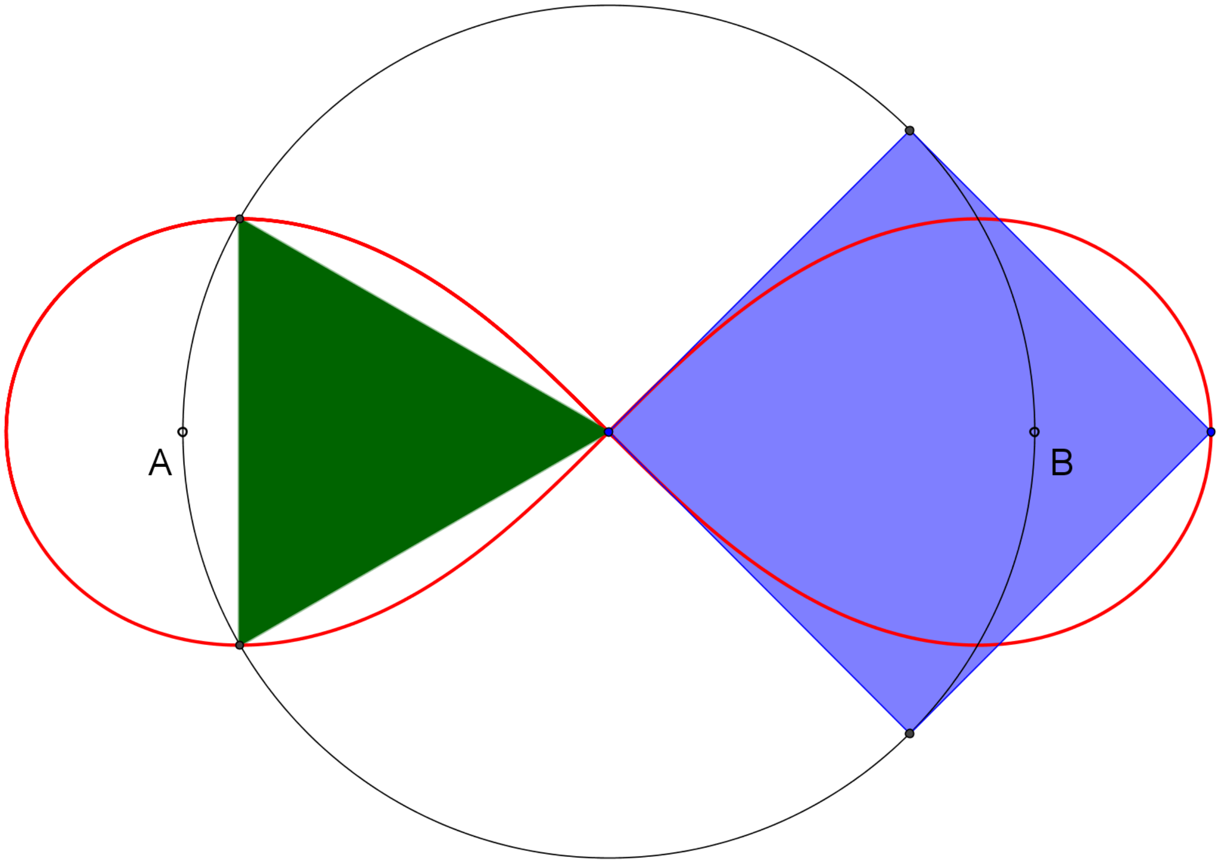




Aus $A'(x-u/y-\sqrt{1-u^2})$, $B'(x+u/y+\sqrt{1-u^2})$, $\overline{AA'}=\sqrt{2}$ und $\overline{BB'}=\sqrt{2}$, folgt durch Elimination von u die BL-Gleichung $2(x^2-y^2)=(x^2+y^2)^2$.

VI Diverse Eigenschaften einer BL

Kreis, gleichseitiges Dreieck, Quadrat



- gleichseitiges Dreieck:

  $E(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}/\pm\frac{1}{2})$ sind die Extremalpunkte.

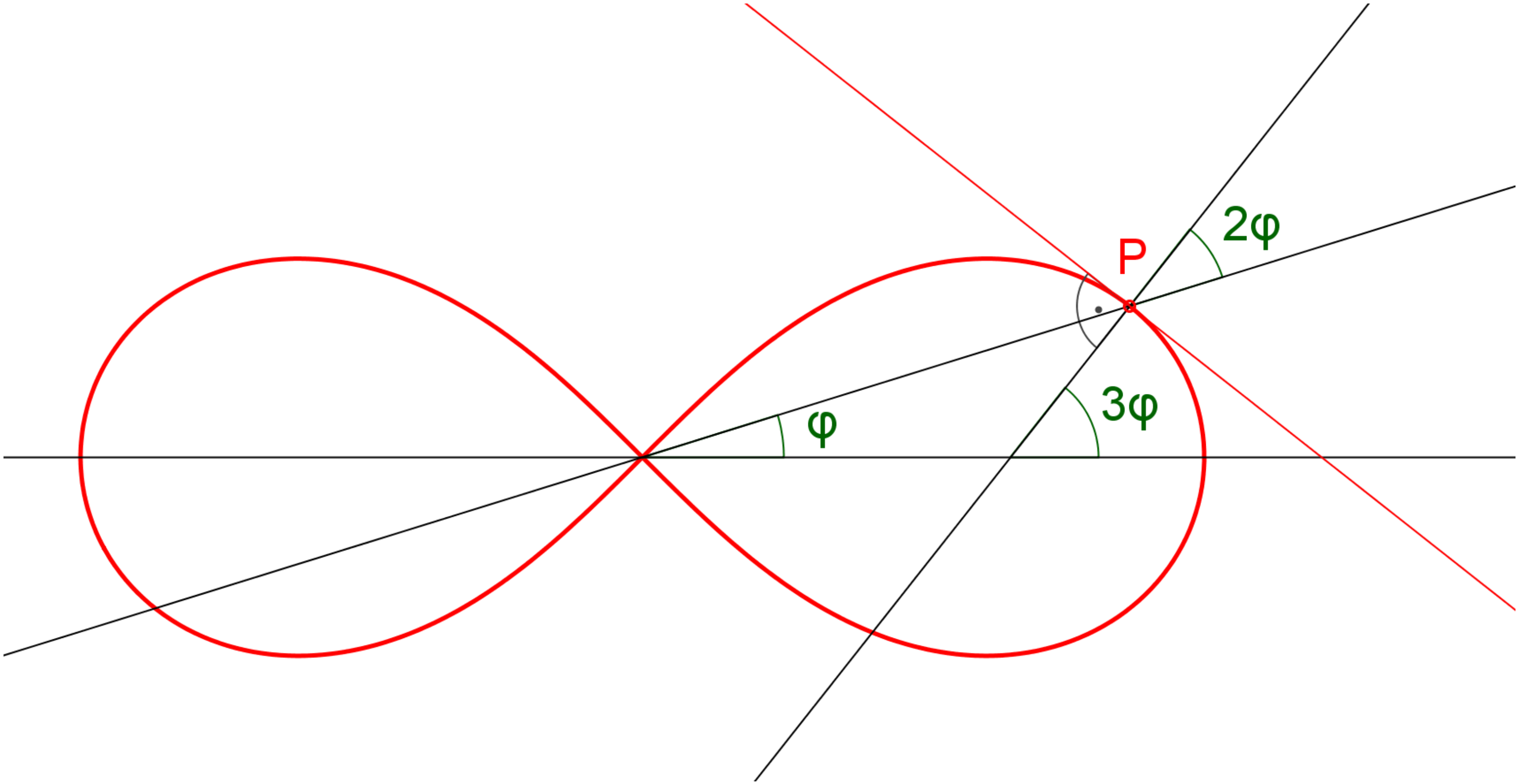
  (→Übung vorne oder mit partiellen Ableitungen)

- Der Quadratflächeninhalt entspricht dem Inhalt der halben BL:

$$2\cdot\int_0^{\pi/4}\frac{r^2}{2}d\varphi=\int_0^{\pi/4}2\cos(2\varphi)\,d\varphi=[\sin(2\varphi)]_0^{\pi/4}$$

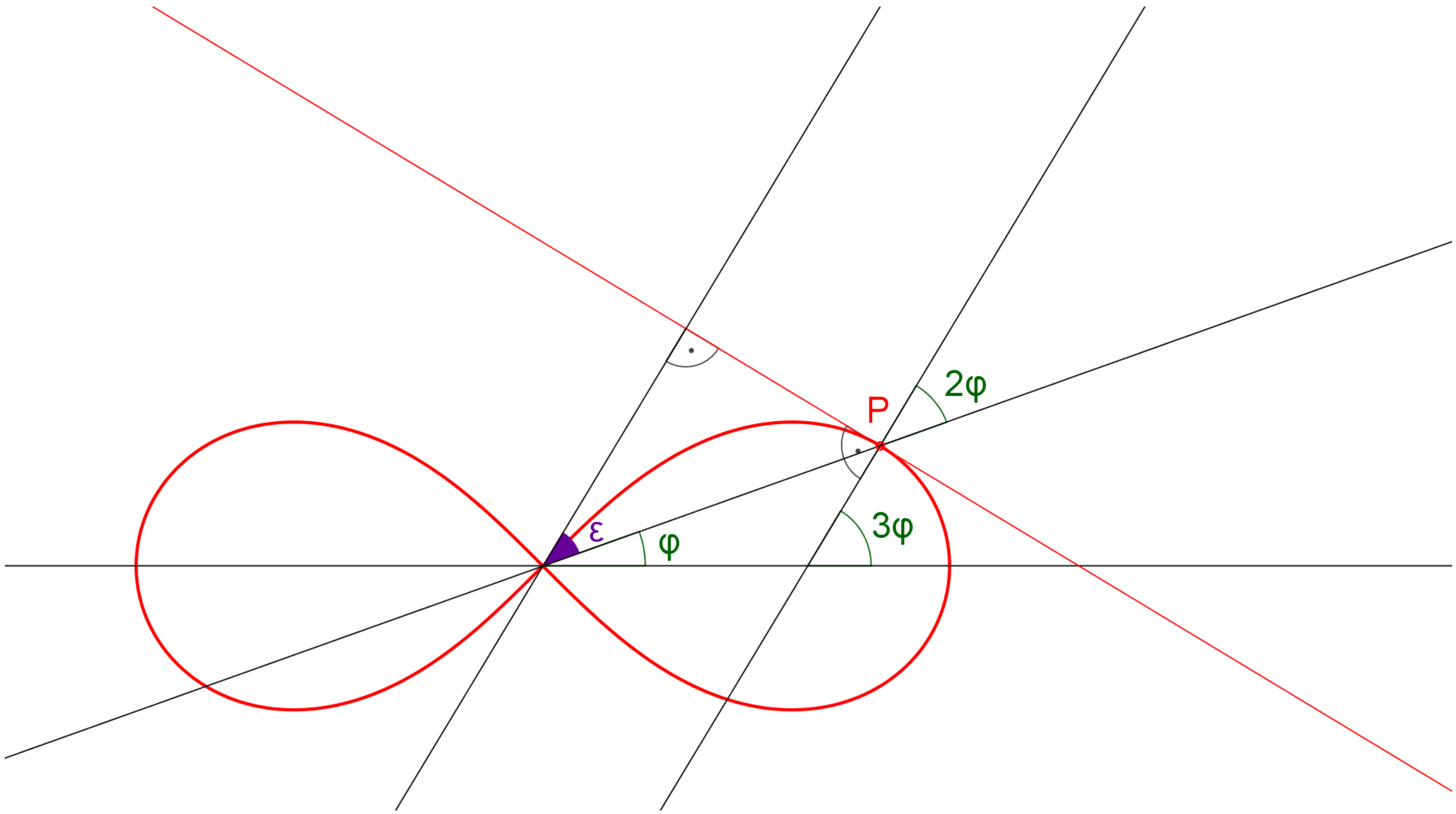
$$=\sin(\pi/2)=1$$

Winkeleigenschaft:

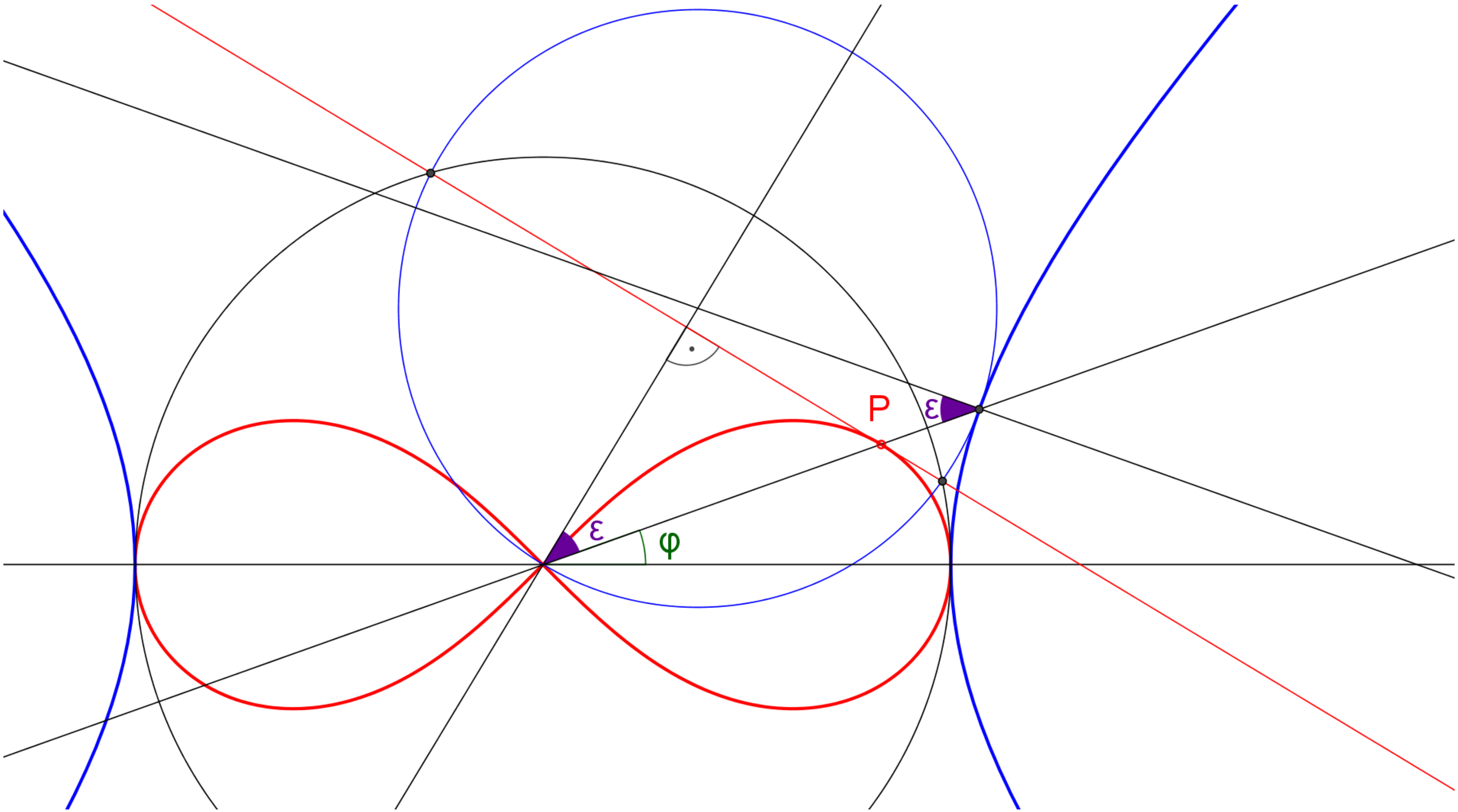


Spezialfall: Für φ = 30° ist P ein Hochpunkt.

Zeige: $\varepsilon = 2\varphi$



Inversion am Kreis:



ε = 2φ, da die Normale gerade die negative Steigung der Ursprungsgeraden hat:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - k \Rightarrow \overrightarrow{gradient} = 2\binom{x}{-y}$$