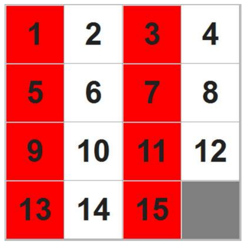
Gruppen, Graphen, Algorithmen im Einsatz bei Schiebepuzzles

Bernhard Ruh

Kantonsschule Solothurn
bernhard.ruh@ksso.ch

Tag für Mathematik und Unterricht
Stans, September 2018



Inhalt

Inhalt

Frühzeit

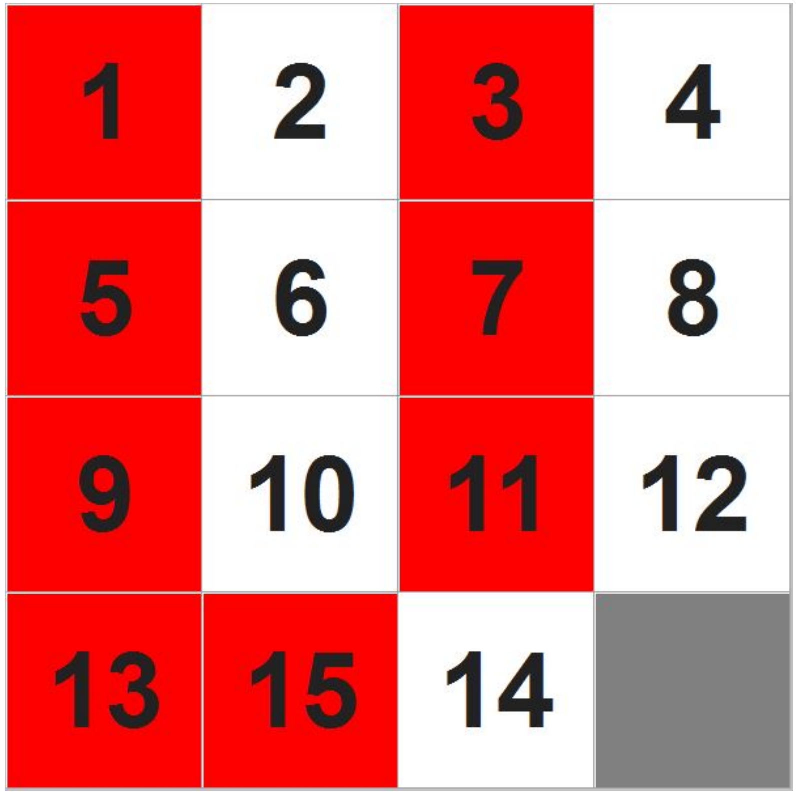
1874 Palmer Chapman, Pöstler in New York, erfindet das 15 Puzzle.

1880 Hype in Amerika

15—14—13.—THE GREAT PRESIDENTIAL PUZZLE.

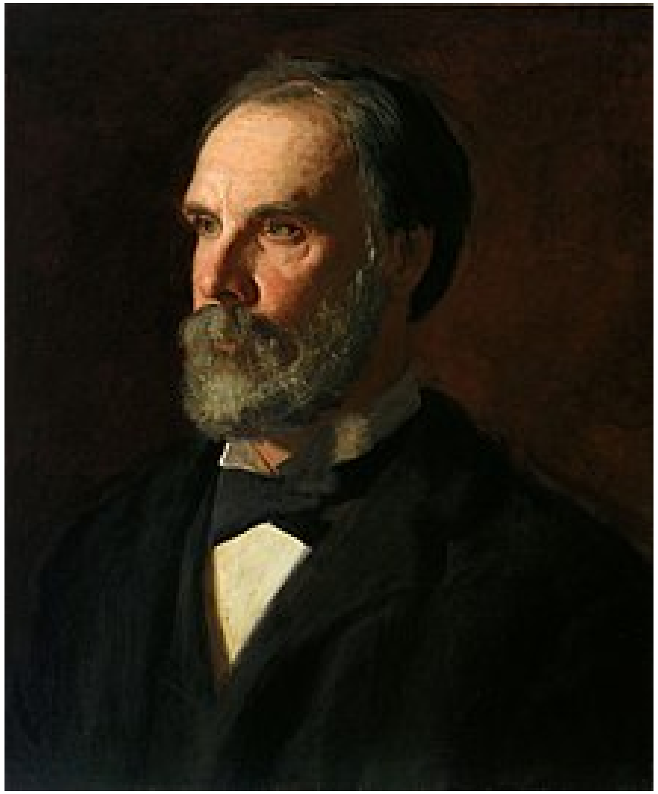
Frühzeit

1890 Sam Loyd offeriert 1000 Dollar für die Lösung des 15-14 Puzzles



Frühzeit

1879 William Woolsey Johnson bewies die Unlösbarkeit des 15-14 Puzzles



Notes on the "15" Puzzle.

I.

BY WM. WOOLSEY JOHNSON, *Annapolis, Md.*

THE puzzle described below has recently been exercising the ingenuity of many persons in Baltimore, Philadelphia and elsewhere. A ruled square of 16 compartments is numbered as in this diagram:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Neuzeit

1970 A. L. Davies, Rotating the Fifteen Puzzle

1974 R. M. Wilson, Graph puzzles, homotopy, and alternating groups

1999 A. F. Archer, A Modern Treatment of the 15 puzzle

2004 P. Trapa, Permutations and the 15 puzzle

2005 A. Chapple, An Analysis of the 15-puzzle

2017 T. Howe, Two Approaches to Analyzing the Permutations of the 15 puzzle

Computerzeitalter

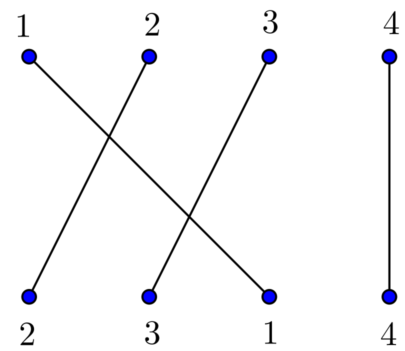
2008 R. E. Korf, Linear-Time Disk-Based Implicit Graph Search

TABLE III. COMPLETE SEARCHES OF SLIDING-TILE PUZZLES

Size	Tiles	Radius	Total States	Max Width	Depth	Ratio
2×2	4	6	12	2	2	6.000
2×3	5	21	360	44	14	8.182
2×4	7	37	20,160	1,999	24	10.085
3×3	8	31	181,440	24,047	24	7.545
2×5	9	55	1,814,400	133,107	36	13.361
3×4	11	53	239,500,800	21,841,159	36	10.966
2×6	11	80	239,500,800	13,002,649	49	18.419
2×7	13	108	43,589,145,600	1,862,320,864	66	23.406
3×5	14	84	653,837,184,000	45,473,143,333	42	14.486
4×4	15	80	10,461,394,944,000	784,195,801,886	53	13.340
2×8	15	140	10,461,394,944,000	367,084,684,402	85	28.499

Inversionszahl (Fehlstände) einer Permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



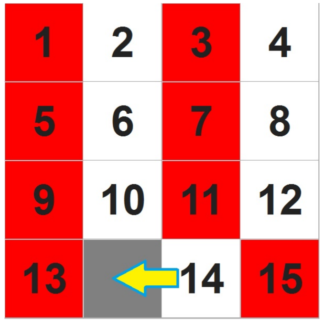
Anzahl Paare (i, j) mit
$i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$

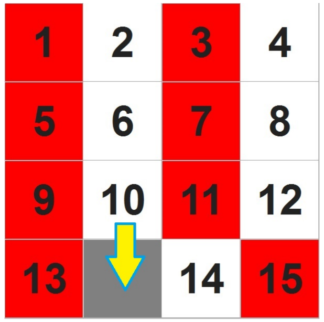
Anzahl Kreuzungen

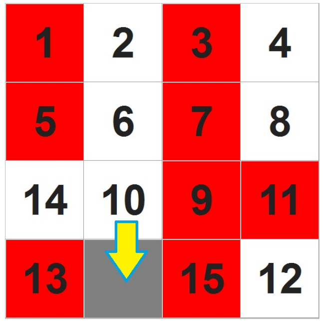
(2,1) und (3,1) $\Longrightarrow$ Inversionszahl=2

Parität beim 15-Puzzle

Konstellation zeilenweise notieren





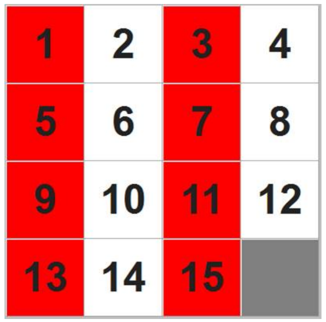


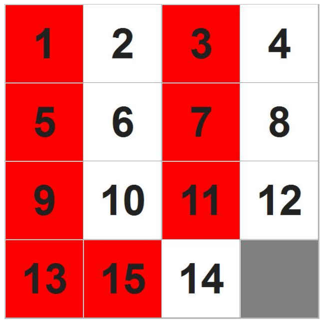
- Inversionszahl ändert nicht
- Zeile der Lücke ändert nicht

- Inversionszahl ändert um $\pm 1, \pm 3$
- Zeile der Lücke ändert um 1

Parität:=(Inversionszahl plus Zeile der Lücke) mod 2

Parität bleibt invariant bei jedem Zug





- Parität 0

- Parität 1

Inhalt

Symmetrische Gruppe

Symmetrische Gruppe S_n

Menge aller Permutationen von n Elementen mit Komposition als Operation.

Beispiel: $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (123)(4) = (12)(13)$

Satz

Jede Permutation lässt sich durch disjunkte Zyklen darstellen.

Satz

Jede Permutation ist (nicht eindeutiges) Produkt von Zweierzyklen (Transpositionen). Die Anzahl Transpositionen ist immer entweder gerade oder ungerade.

Alternierende Gruppe

Alternierende Gruppe A_n

Menge aller Permutationen von n Elementen mit gerader Anzahl von Transpositionen. A_n ist Untergruppe von S_n mit $\frac{n!}{2}$ Elementen.

Satz

Eine zyklische Vertauschung einer ungeraden Anzahl von Elementen ist eine gerade Permutation (also in A_n).

Beispiel: $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (123)(4) = (12)(13)$

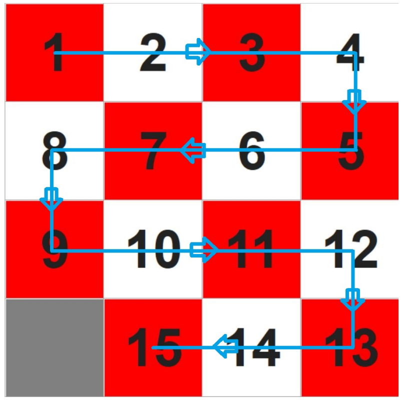
Permutationsbeschreibung

Grundfrage

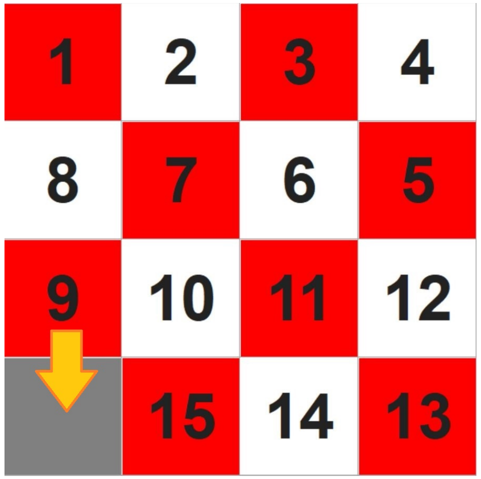
Welche Permutationen können beim 15 Puzzle durch Schieben hergestellt werden?

(Praktische) Voraussetzungen:

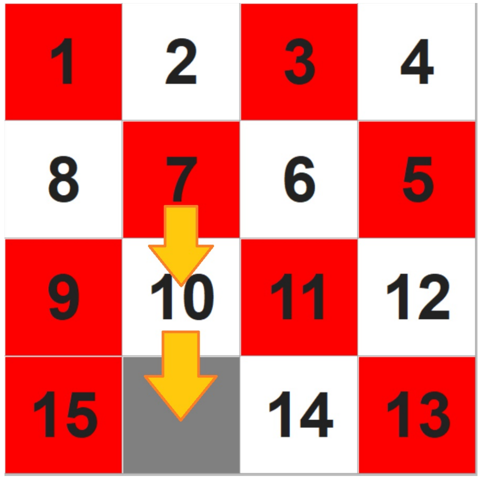
- Lücke weglassen. Beim Standardpuzzle ist $n = 15$
- Schlangenlinie statt zeilenweise ($\Longrightarrow$ Lücke längs Schlangenlinie verschiebbar)



$\subset A_n$



$=(10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 9)$



$=(11\ 12\ 13\ 14\ 10)(8\ 9\ 7)$

Alle Züge sind Kombinationen von Zyklen ungerader Länge, erzeugen also gerade Permutationen.

$= A_n$

Erzeugende Elemente von A_n	Anzahl
alle	$\frac{15!}{2} = 653'837'184'000$
Dreierzyklen ((12345)=(123)(145))	$\binom{15}{3} = 455$
Aufeinanderfolgende Dreierzyklen [1]	13
(13 14 15) und (15 1 2 3 ... 14) [2]	2

Satz

Mit dem 15 Puzzle können genau die Elemente der alternierenden Gruppe A_{15} erzeugt werden.

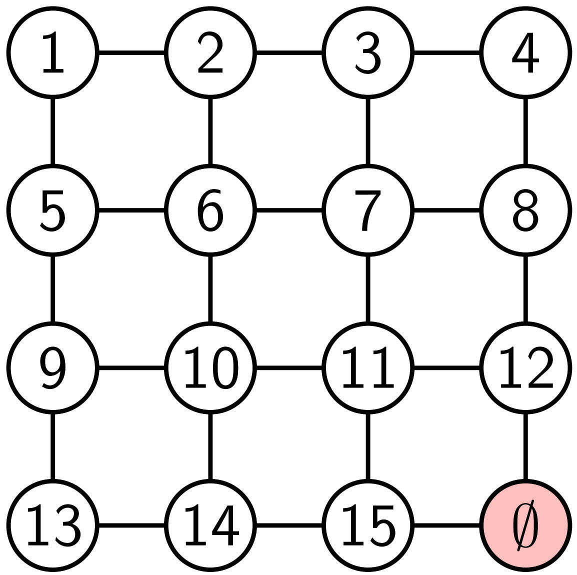
[1] A. Chapple, An Analysis of the 15-puzzle

[2] K. Conrad, Generating Sets

Inhalt

Verallgemeinerung

- Puzzle als Graph G interpretieren
- Knotenbeschriftung mit Zahlen 1-15 und $\emptyset$
- Zug: Austausch von $\emptyset$ mit Zahl längs Kante

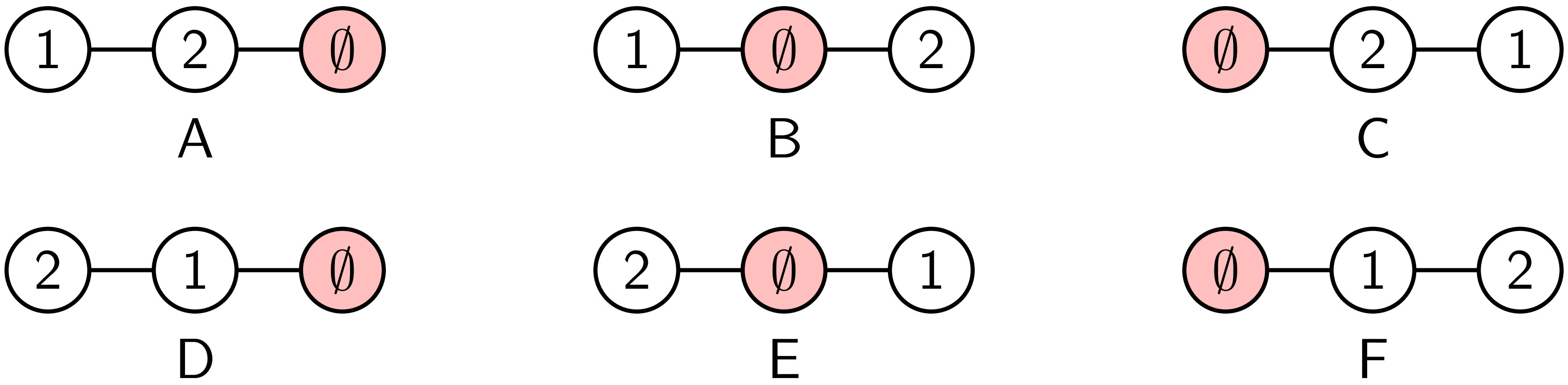


G erzeugt $Puz(G)$

Neuer Graph $Puz(G)$

- Knoten: alle möglichen Beschriftungen
- Knoten mit Kante verbunden, falls Überführung mit einem Zug möglich

Beispiel (1x3 puzzle):



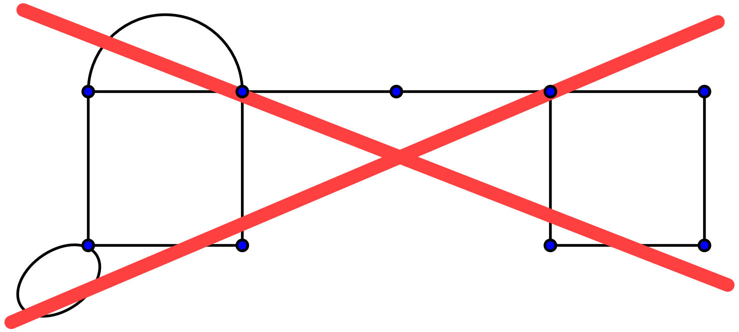
$Puz(G)$:

2 Komponenten

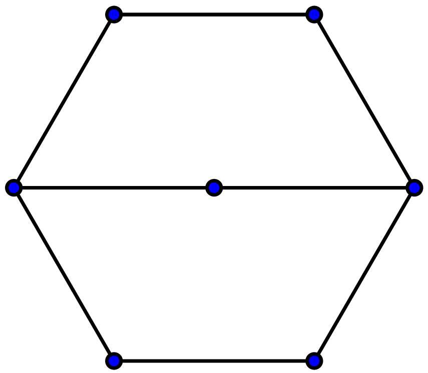
Sinnvolle Graphen

Anforderungen an Graph G

- Einfacher Graph (Keine Mehrfachkanten, keine Loops)
- Nicht separierbar (also 2-zusammenhängend)



Sonderbehandlung: Polygone, Theta-0-Graph (θ_0)

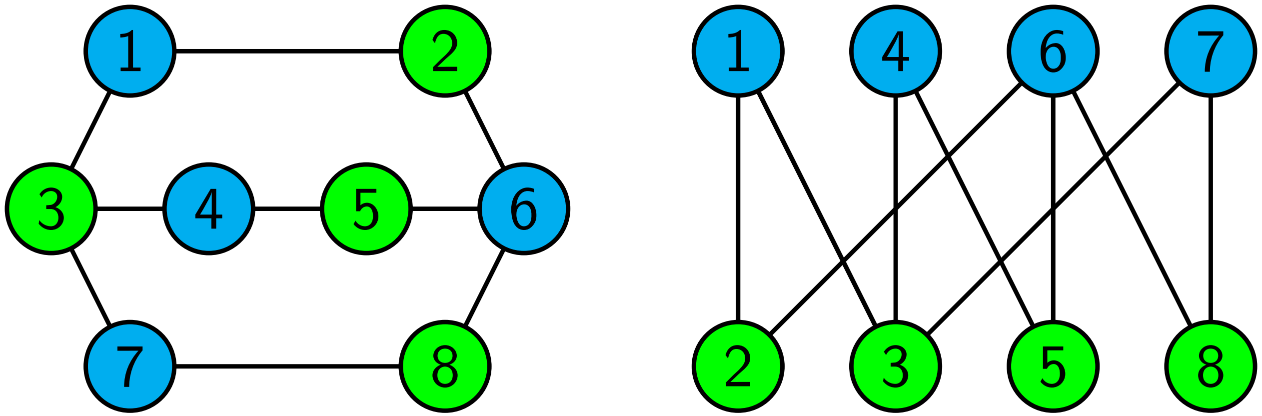


Demo Theta1

Bipartite Graphen

Bipartiter Graph

Die Knoten lassen sich in disjunkte Mengen teilen, so dass innerhalb der gleichen Menge keine Verbindungen vorkommen.



Satz [König, 1936]

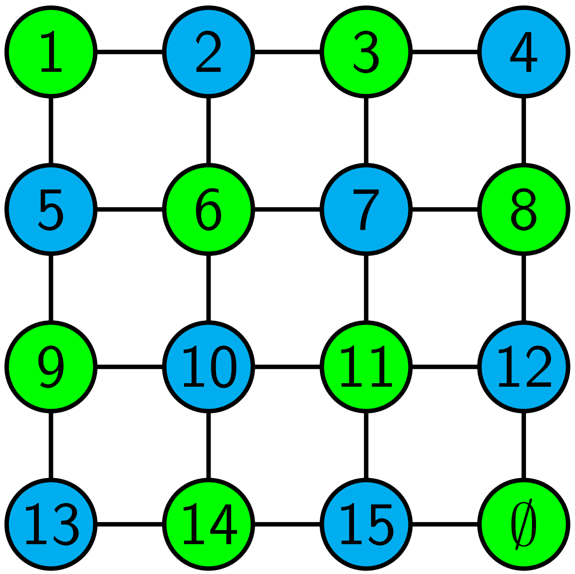
Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Zyklen ungerader Länge besitzt.

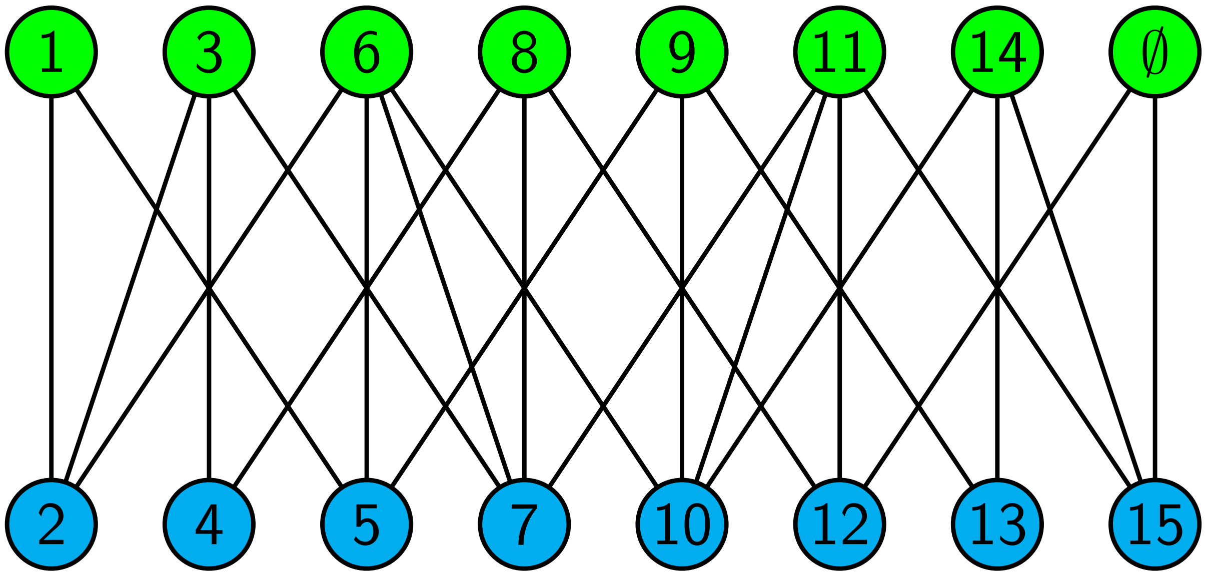
Hauptresultat

Satz [Wilson, 1973]

Für Schiebpuzzles auf einfachen, nicht separierbaren Graphen G (kein Polygon, nicht θ_0) können folgende Konstellationen erreicht werden:

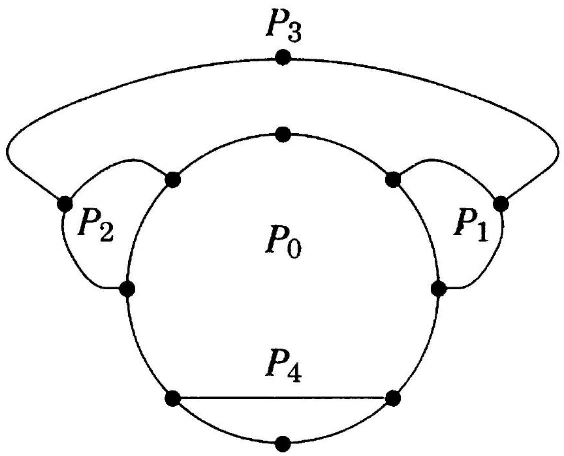
G nicht bipartit:	Elemente von S_n (alle Permutationen)
G bipartit:	Elemente von A_n (gerade Permutationen)





Beweisidee

Einfache, nicht separierbare Graphen haben prinzipiell folgende Form (Ear(handle)-theorem, Whitney 1932):



- Vollständige Induktion nach der Anzahl Ohren (Betti Zahl).
- Verankerung für einfache θ-Graphen (nicht θ_0).
- Mehr Gruppentheorie nötig: primitiv, doppelt transitiv

Inhalt

Konkretes Lösen

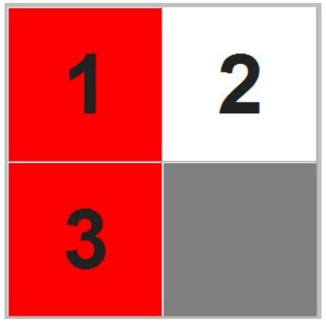
Hauptprobleme

- Konkrete Methode (beim 15 Puzzle, bei anderem Graphen)
- Kürzeste Lösung (Anzahl Einzelschritte, Anzahl Züge)

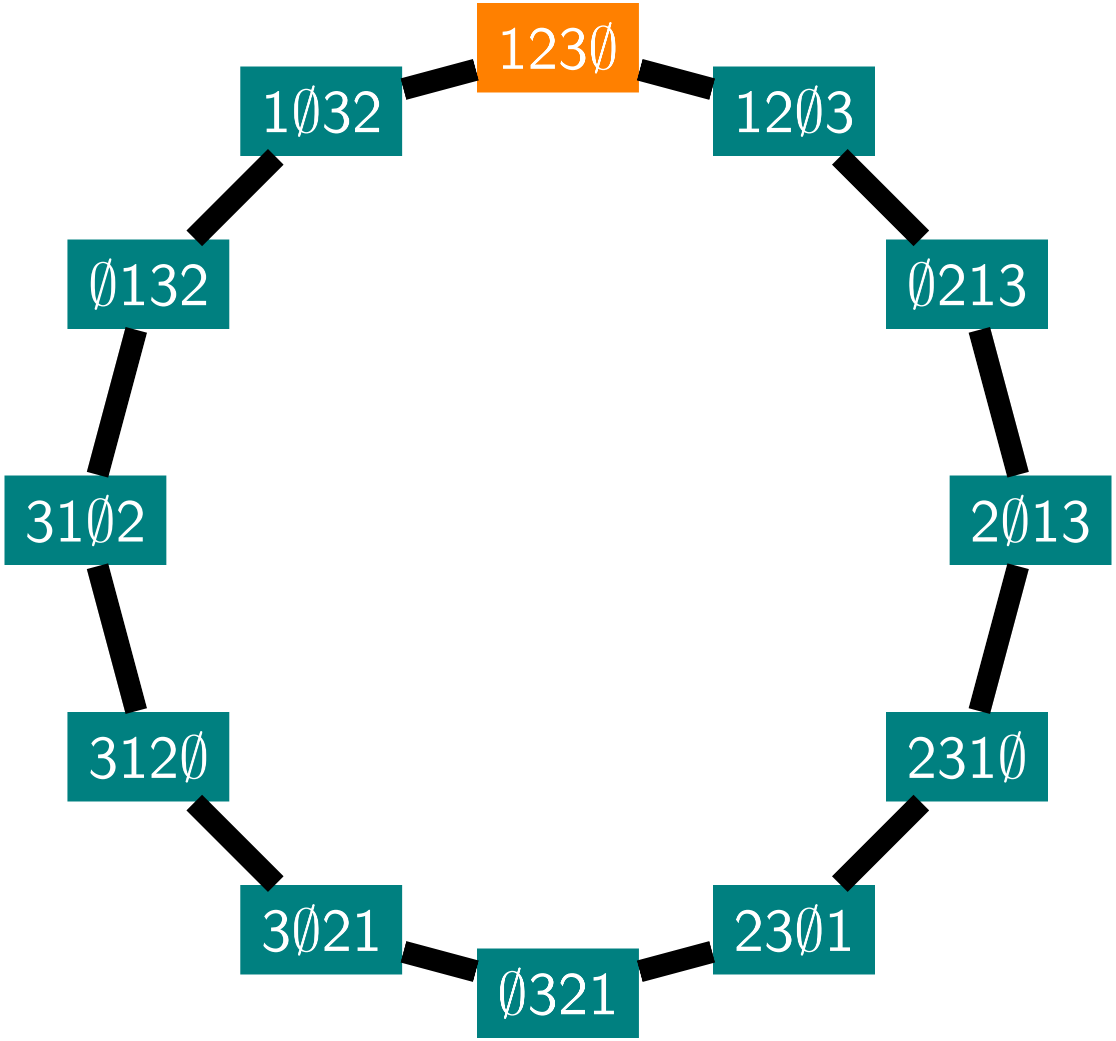
Lösung:

- Informatik: Dijkstra-Algorithmus (oder bessere) auf $Puz(G)$
- 15 Puzzle (Korf, 2008): Maximal 80 Schritte, 43 Züge
- 31 Puzzle: Noch offen.

Mehr zu $Puz(G)$

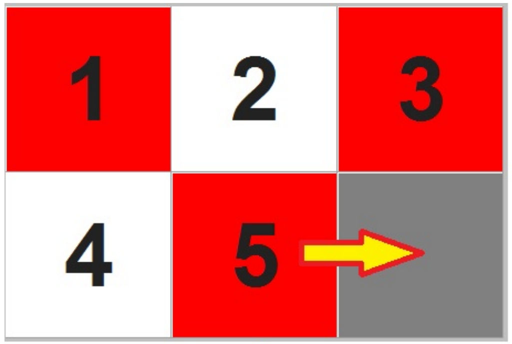


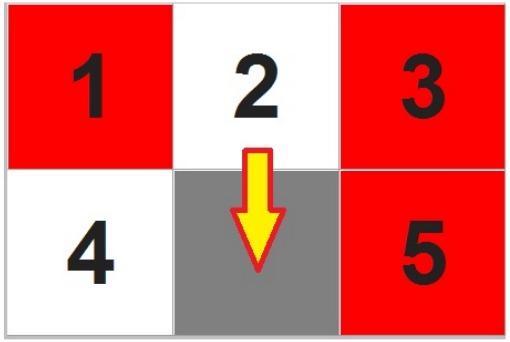
4!/2=12
Stellungen



Maximal 6 Züge

Das 2×3 puzzle



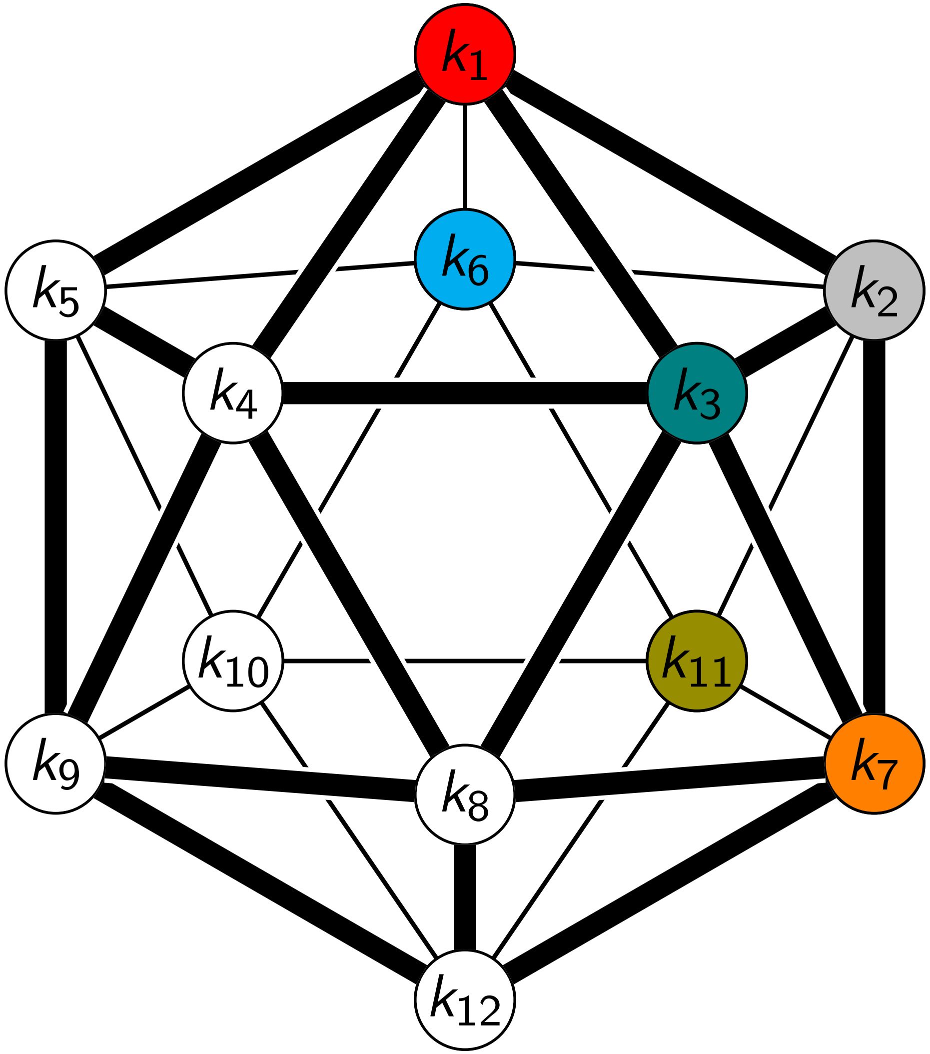


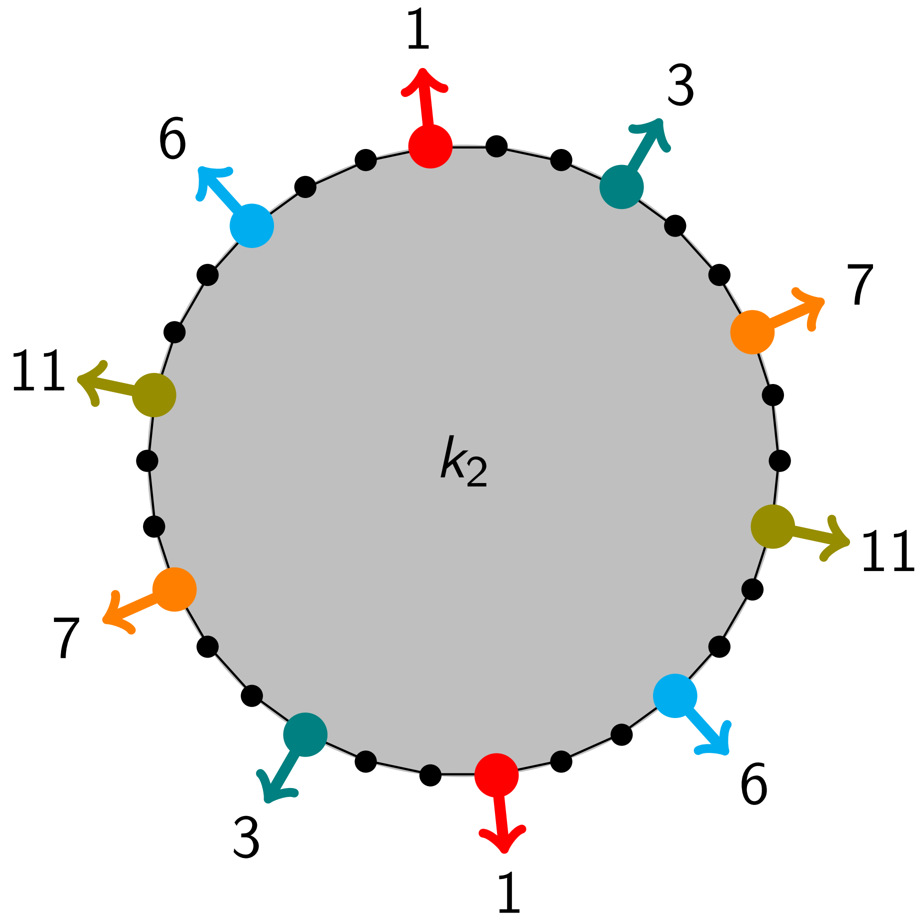
- $6!/2{=}360$ Positionen
- Positionen 'äquivalent', falls Überführung durch Randzüge.
- Jede Position erzeugt 30 äquivalente Positionen: Klasse
- $\Rightarrow$ 30 Elemente pro Klasse, $\Rightarrow$ 12 Klassen
- Überführung zwischen Klassen geschieht durch Querzüge.
- Klassen sind 'benachbart', falls sie durch einen Querzug ineinander übergeführt werden können.

Analyse zeigt

Jede der 12 Klassen ist zu genau 5 Klassen benachbart.

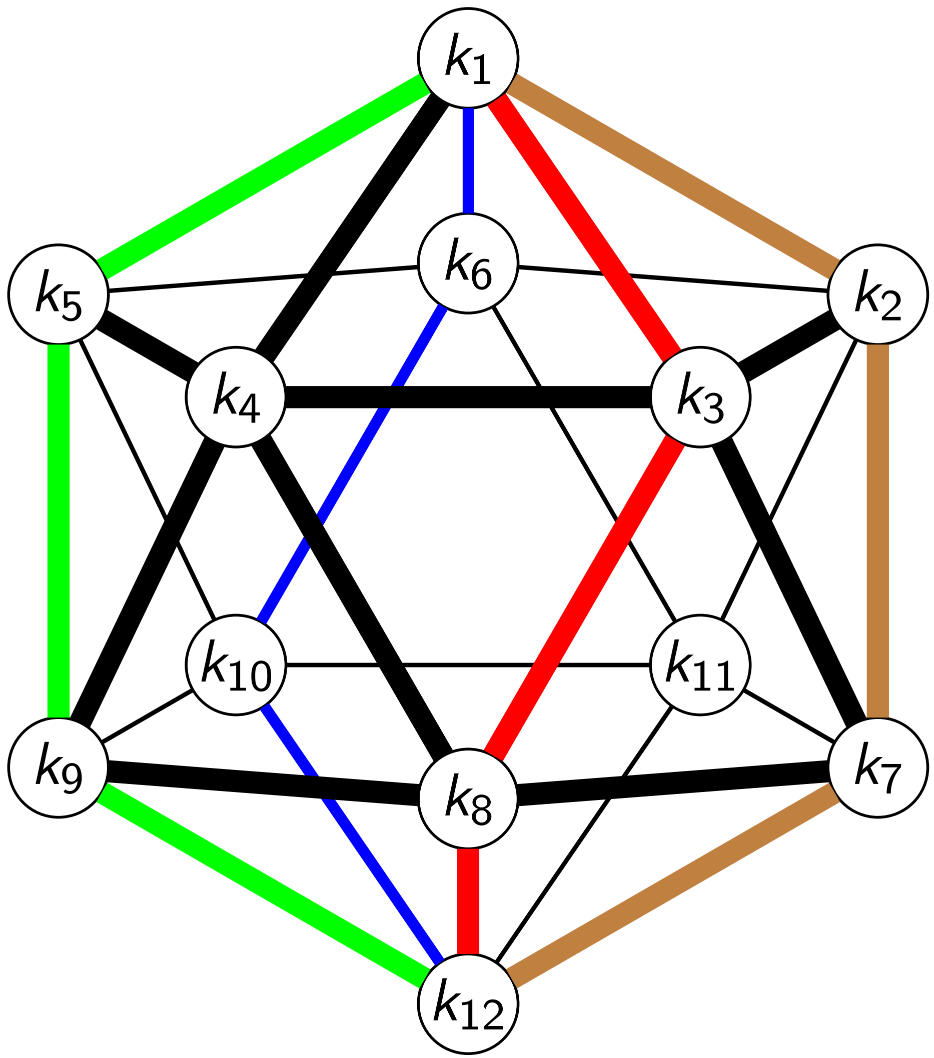
$Puz(2 \times 3)$





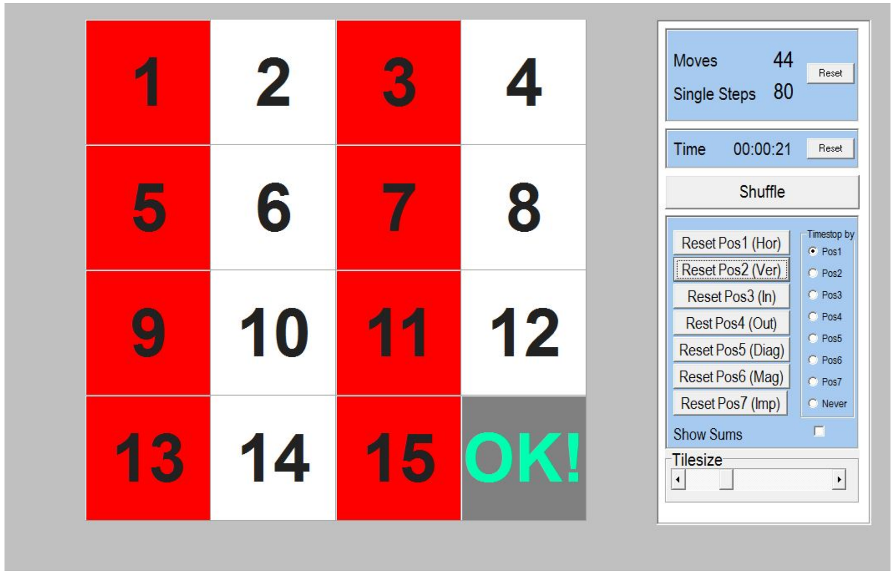
Anzahl Züge

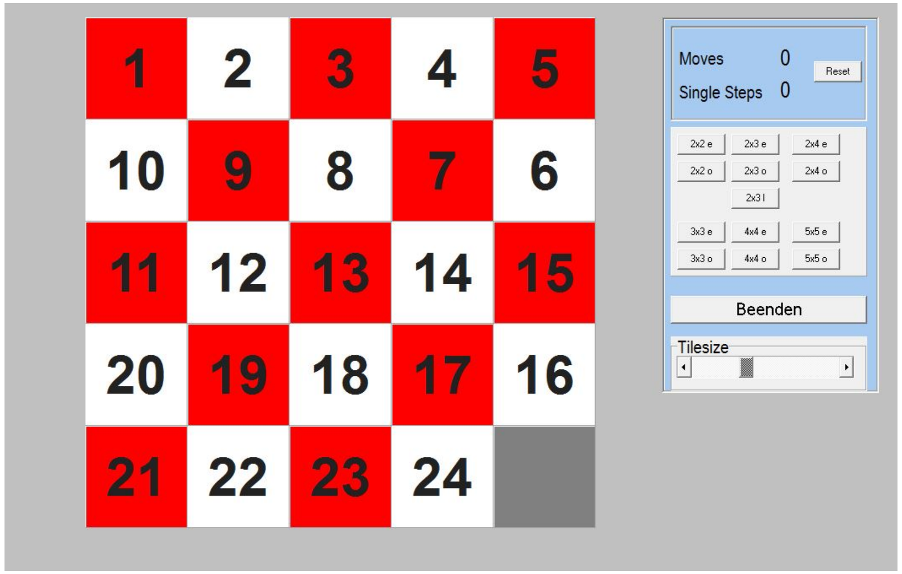
- Grobe Abschätzung auf $Puz(G)$: Maximal $2+7+7+14=30$ Züge
- Tatsache 1 (Dijkstra): Maximal 21 Züge (von Position 45$\emptyset$123)
- Tatsache 2: es gibt 4 Wege mit Länge 21 von dieser Position

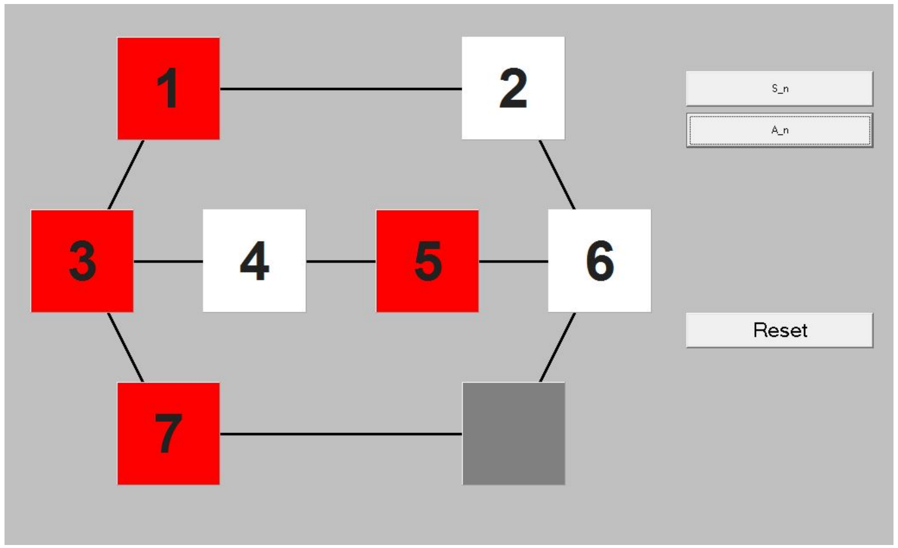


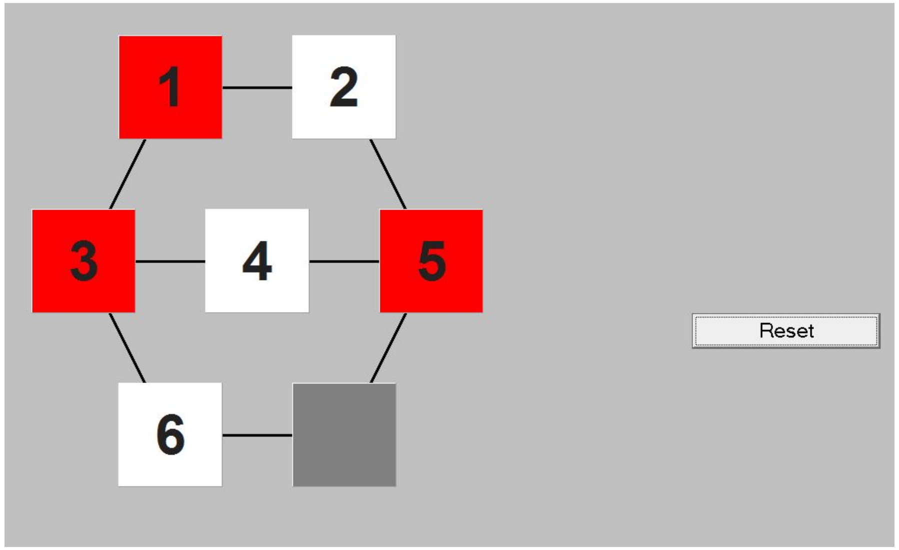
Das war's!

Programme


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 OK!
Moves 44
Single Steps 80
Reset
Time 00:00:21
Reset
Shuffle
Reset Pos1 (Hor)
Reset Pos2 (Ver)
Reset Pos3 (In)
Rest Pos4 (Out)
Reset Pos5 (Diag)
Reset Pos6 (Mag)
Reset Pos7 (Imp)
Timestop by
Pos1
Pos2
Pos3
Pos4
Pos5
Pos6
Pos7
Never
Show Sums
Tilesize


1 2 3 4 5
10 9 8 7 6
11 12 13 14 15
20 19 18 17 16
21 22 23 24
Moves 0
Single Steps 0
Reset
2x2 e
2x3 e
2x4 e
2x2 o
2x3 o
2x4 o
2x3 I
3x3 e
4x4 e
5x5 e
3x3 o
4x4 o
5x5 o
Beenden
Tilesize


1 2
3 4 5 6
7
S_n
A_n
Reset


1 2
3 4 5
6
Reset