# TMU 2018, Stans

## Endliche homogene Markovketten am Gymnasium?

Arno Gropengiesser

Liceo cantonale di Lugano 1

12 settembre 2018

# Index

# Einführung

- SF PAM ... Liceo cantonale di Lugano 1
- ETH für die Schule
- SIMS-DECS
- Kanon

# Markov-Ketten am Gymnasium?

- Kanton Tessin: 13 Schuljahre bis zur Maturität (15 nach HarmoS)
- Neben Mathematik als GF auch als Vertiefungsfach
- SuS in SF BC und PAM obligatorisch Mathematik als Vertiefungsfach
- Im 12. und 13. Schuljahr: 5 Stunden Mathematik + 6 SF PAM (3M, 3P) die Woche

# SF PAM am LiLu1



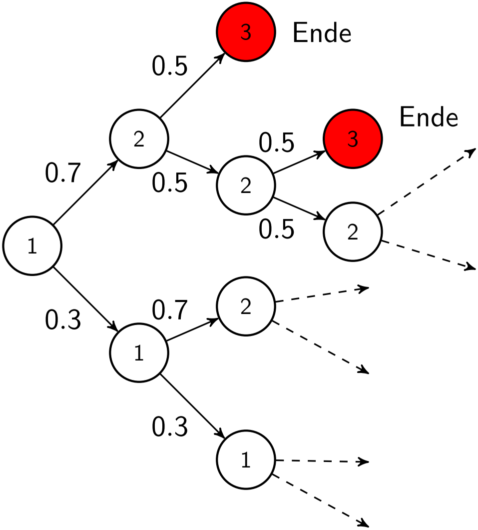


| . | P | M |
|---|---|---|
| I | Erhaltungssätze, Rotationen | Lin. Algebra und Anw., lin. Regr. |
| II | Schwingungen und Wellen | Kompl. Zahlen, DFT |
| III | Wärmelehre | Markov-Ketten |
| IV | Zeitliche Entwicklung | Gew. Diff. Gl. |

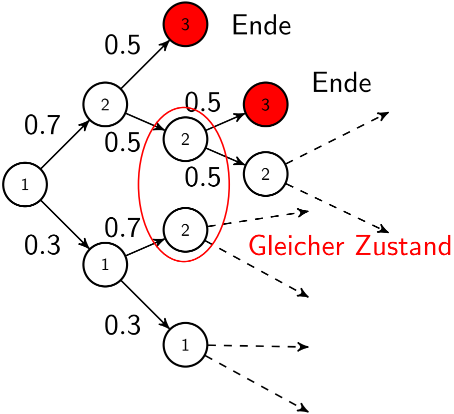
# Was ist eine Markov-Kette?

Bei einem Onlinespiel geht es darum, von einer Ebene (Zustand 1) über eine Hochebene (Zustand 2) zum Gipfel (Zustand 3) zu gelangen. Dabei sind verschiedene Hürden zu überwinden um das Ziel zu erreichen und das Spiel als Gewinner zu verlassen (man spiele solange bis der Zustand 3 erreicht ist). Ein durchschnittlicher Spieler bewältigt die Hürden von Zustand 1 zu 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%, von 2 zu 3 mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%, andernfalls bleibt er im gegenwertigen Zustand. Der Prozess kann als Baumdiagramm dargestellt werden.

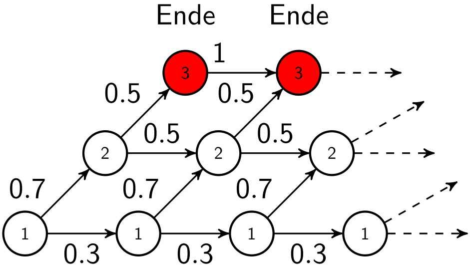
# Was ist eine Markov-Kette?



# Was ist eine Markov-Kette?

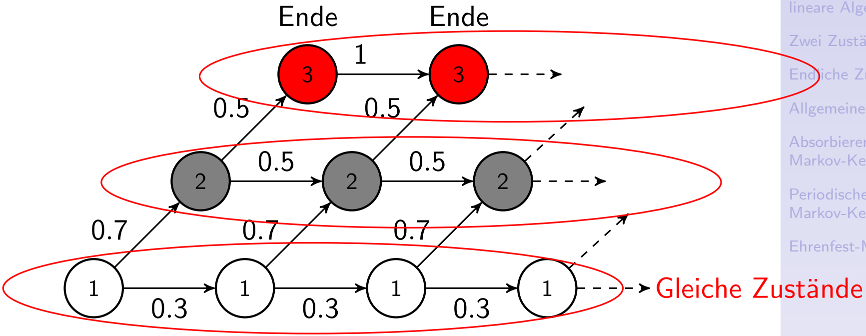


# Was ist eine Markov-Kette?

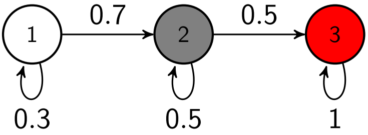


# Was ist eine Markov-Kette?

Wir wollen zusammenfassen:



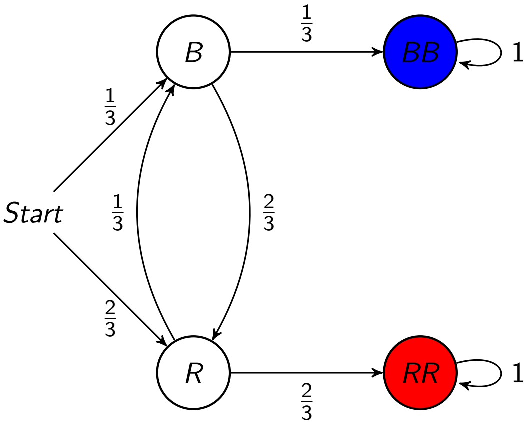
# Was ist eine Markov-Kette?




Ein Übergangsdiagramm (Transitionsdiagramm) einer endlichen (3 Zustände) homogenen ($p_{i,j} = konstant$) Markov-Kette

# Stochastische Matrix

Ein Würfel habe zwei Seiten blau beschriftet und vier rot. Wir werfen in solange, bis zwei mal auf Folge die selbe Farbe auftritt, also das Muster BB (blau-blau) oder RR (rot-rot). Als erstes zeichnen wir direkt ein Übergangsdiagramm:



# Stochastische Matrix

| Zustand $i$ | B | R | BB | RR |
|---|---|---|---|---|
| 1. Wurf | $1/3$ | $2/3$ | $0$ | $0$ |
| | $\cdot 1/3$ | $\cdot 2/3$ | $\cdot 1/3$ $+$ $\cdot 1$ | $\cdot 2/3$ $+$ $\cdot 1$ |
| 2. Wurf | $2/9$ | $2/9$ | $1/9$ | $4/9$ |
| | $\cdot 1/3$ | $\cdot 2/3$ | $\cdot 1/3$ $+$ $\cdot 1$ | $\cdot 2/3$ $+$ $\cdot 1$ |
| 3. Wurf | $2/27$ | $4/27$ | $5/27$ | $16/27$ |

# Stochastische Matrix

| Zustand | B | A | BB | AA | Spaltensumme |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Wurf | $^1/_3$ | $^2/_3$ | 0 | 0 | 1 |
| 2. Wurf | $^2/_9$ | $^2/_9$ | $^1/_9$ | $^4/_9$ | 1 |
| 3. Wurf | $^2/_{27}$ | $^4/_{27}$ | $^5/_{27}$ | $^{16}/_{27}$ | 1 |

Tabelle: Zusammenfassung der Resultate

# Stochastische Matrix

Vom $n - ten$ zum $(n+1) - ten$ Wurf:

$$\begin{cases} p_1' = \frac{1}{3} \cdot p_2 \\ p_2' = \frac{2}{3} \cdot p_1 \\ p_3' = \frac{1}{3} \cdot p_1 + 1 \cdot p_3 \\ p_4' = \frac{2}{3} \cdot p_2 + 1 \cdot p_4 \end{cases} \tag{1}$$

# Stochastische Matrix





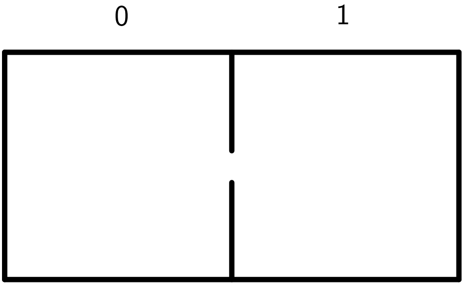
Als lineare Abbildung (mit stochastische Matrix):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ p_4' \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T, \text{ die Übergangsmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}}_{=:\vec{v}}$$

$$\vec{v}_n = T \cdot \underbrace{\vec{v}_0}_{=T^{n-1}\cdot\vec{v}_{n-1}} = T \cdot T^{n-1} \cdot \vec{v}_0 = T^n \cdot \vec{v}_0$$

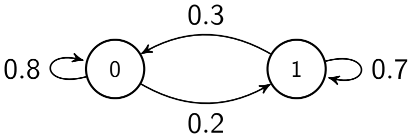
# Diffusionsmodell

Zwei mit Luft gefüllte Kammern kommunizieren durch eine (teilweise) durchlässige Membran.
In der Kammer 0 sei ein Parfum entwichen, wie verteilt es sich in den Kammern langfristig?



# Diffusionsmodell

Das zugehörige Transitionsdiagramm:



# Diffusionsmodell





Man kann sich allgemein überlegen:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}, \quad p, q \in I = [0;\ 1]$

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \right| = 1-p-q$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \left( 1 + \underbrace{1-p-q}_{\det(A)} \right) \lambda + \underbrace{1-p-q}_{\det(A)} = (\lambda - 1) \left( \lambda - \left( \underbrace{1-p-q}_{\det(A)} \right) \right)$$

# Diffusionsmodell





$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - p - q = \det(A)$$

$$\underbrace{\min}_{p,q\in I}(1 - p - q) = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$\underbrace{\max}_{p,q\in I}(1 - p - q) = 1 - 0 - 0 = 1$$

Wir benutzen nun die Eigen-Werte und -Vektoren, um das langfristige Verhalten zu untersuchen:

# Diffusionsmodell





$$\vec{w}_n = A^n \cdot \vec{w}_0 = A^n \cdot \left( \alpha \cdot \tfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) =$$

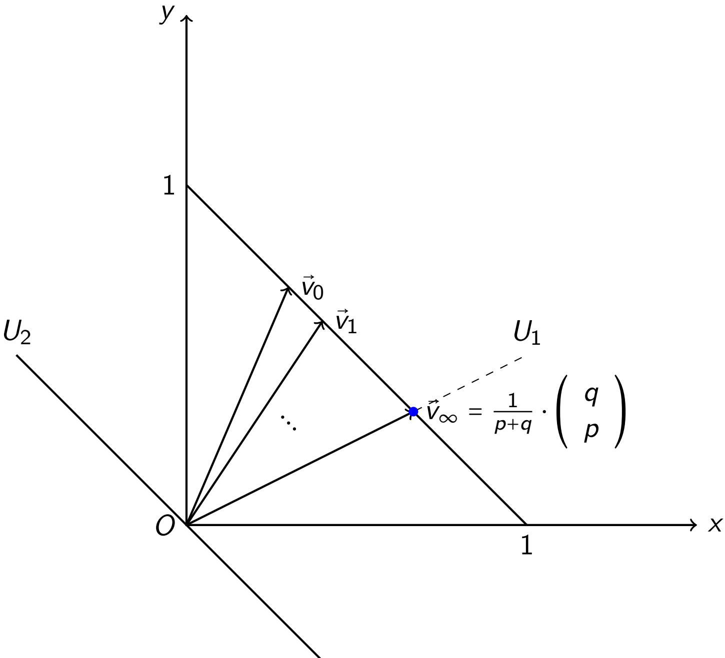
$$= \alpha \cdot \tfrac{1}{p+q} \cdot \underbrace{A^n \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}}_{=1^n \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}} + \beta \cdot \underbrace{A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\lambda_2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Für $\vec{w}_\infty = \vec{w}_s = \lim\limits_{n\to\infty} (A^n \cdot \vec{w}_0)$ erhalten wir

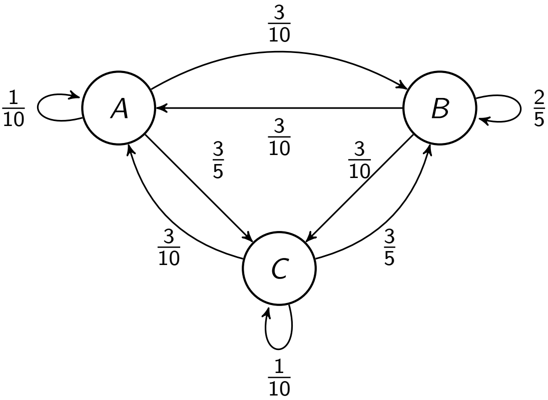
$$\vec{w}_\infty = \vec{w}_s = \lim_{n\to\infty} (A^n \cdot \vec{w}_0) = \lim_{n\to\infty} \left( \alpha \cdot \tfrac{1}{p+q} \cdot \underbrace{A^n \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}}_{=1^n \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}} + \beta \cdot \underbrace{A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\lambda_2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left( \alpha \cdot \tfrac{1}{p+q} \cdot 1^n \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \beta \cdot \lambda_2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot \tfrac{1}{p+q} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \vec{u}_{\lambda=1}$$

# Diffusionsmodell



# Beispiel mit 3 Zuständen




$$T = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

# Beispiel

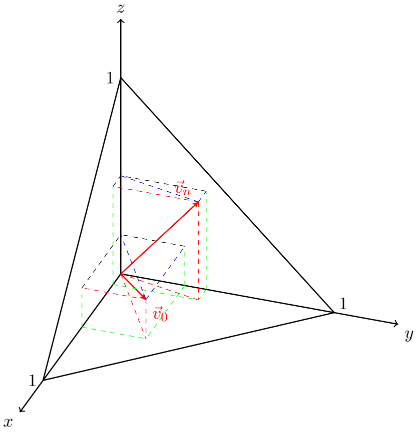
Das zugehörige charakteristische Polynom lautet:

$$p(\lambda) = \frac{(\lambda - 1)(1 + 5\lambda)^2}{25}.$$

Einziger Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = 1$:

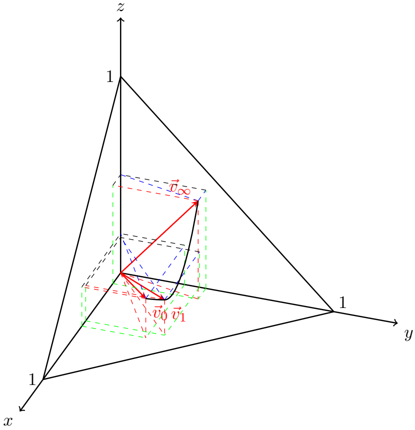
$\vec{u}_1 = (4;\ 7;\ 5)^t \in \mathbb{R}^3$.

# Beispiel



# Beispiel

Konvergenz im konvexen Polygon:




$x + y + z = 1, \qquad x, y, z \in [0; 1]$

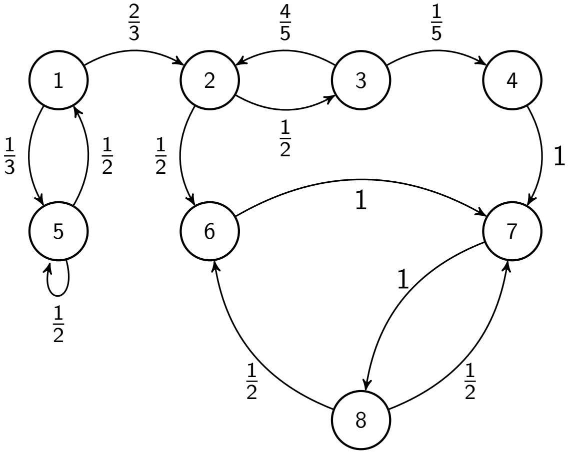
# Eigenschaften

- Geschlossenes System
- **Markoveigenschaft** erfüllt: gegeben die Information über die Entwicklung des Prozesses bis zur Zeit $t$ hängt die zukünftige Entwicklung nur vom Zustand zur Zeit $t$ ab und nicht von der Vergangenheit (System 'ohne Erinnerung")
- Eigenwerte (Achtung bei: algebraische Vielfachheit > geometrische Vielfachheit!)
- Konvergenz (in 1-Norm) bei reguläre (irreduzible und aperiodische) Markov-Kette

# Beispiele von Anwendungen

- Google PageRank
- Bikesharing
- Geschlossener Wirtschaftsraum
- Paradox von Parrondo (Feynman Ratsche)

# Beispiel: Klassifikation der Zustände und der Ketten



# Beispiel: Klassifikation der Zustände und der Ketten

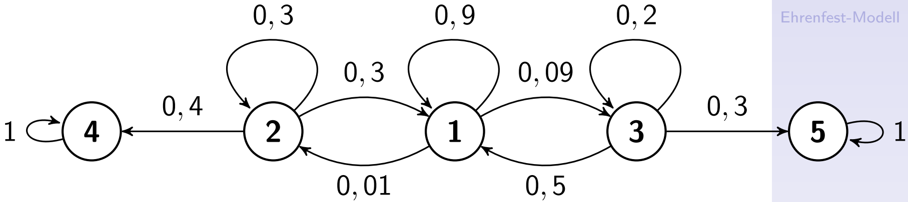
Man unterscheidet:

- Rekurrente Zustände
- Transiente Zustände
- Irreduzible/reduzible Markov-Ketten
- Absorbierende/periodische/reguläre Markov-Ketten
- Bei einer regulären gilt: nach max $n$ Schritte kann man von jedem Zustand zu jedem anderen gelangen ($n-te$ Potenz der Transitionsmatrix ist positiv)

# $C_{14}$ Isotop

Zustand 1: $C_{14}$ in der Atmosphere;
Zustände 2, 3: Pflanzen mit unterschiedlicher Aufnahme des Isotops;
Zustände 4, 5: abgestorbene Pflanzen.

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0,09 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# $C_{14}$ Isotop: totale Absorbtionswahrscheinlichkeit und mittlere Absorbtionszeit

Fundamentalmatrix $F = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,01 & -0,09 \\ -0,3 & 0,7 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1}$.

Seien $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, dann:

$$F \cdot \vec{u} \approx \begin{pmatrix} 28,552 \\ 13,665 \\ 19,095 \end{pmatrix} \quad F \cdot \vec{a}_4 \approx \begin{pmatrix} 0,145 \\ 0,633 \\ 0,090 \end{pmatrix} \quad F \cdot \vec{a}_5 \approx \begin{pmatrix} 0,855 \\ 0,366 \\ 0,909 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix hängt mit I. und II. Mittelwertsregel zusammen:

$$\begin{cases} p_1 = 0,9p_1 + 0,01p_2 + 0,09p_3 \\ p_2 = 0,3p_1 + 0,3p_2 + 0p_3 + 0,4 \\ p_3 = 0,5p_1 + 0p_2 + 0,2p_3 \end{cases}$$

## $C_{14}$ Isotop: totale Absorbtionswahrscheinlichkeit und mittlere Absorbtionszeit

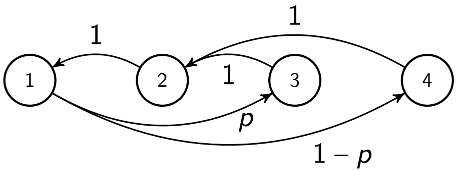
$$\begin{cases} \boxed{p_1 \approx 0,145} \\ p_2 \approx 0,633 \\ p_3 \approx 0,091 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{q_1 = 1 - p_1 \approx 1 - 0,145 = 0,855} \\ q_2 = 1 - p_2 \approx 1 - 0,633 = 0,367 \\ q_3 = 1 - p_3 \approx 1 - 0,091 = 0,909 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = 1 + 0,9m_1 + 0,01m_2 + 0,09m_3 \\ m_2 = 1 + 0,3m_1 + 0,3m_2 + 0m_3 \\ m_3 = 1 + 0,5m_1 + 0m_2 + 0,2m_3 \end{cases} \qquad \text{daraus}$$

$$\begin{cases} \boxed{m_1 \approx 28,552} \\ m_2 \approx 13,665 \\ m_3 \approx 19,095 \end{cases}$$

# $C_{14}$ Isotop

Zustand 1: $N$ (Stickstoff) Molekül in der Atmosphere, trifft entweder oder mit:
Zustand 3: Neutron aus dem All;
Zustand 4: Neutron aus Atombombenexplosion in der Atmosphere (Einsätze und atmosphärische Tests von Kernwaffen zwischen 1945 und 1963);
Zustand 2: Es entsteht $C_{14}$, welches wieder zu $N$ zerfällt, pro Zeiteinheit.



# $C_{14}$ Isotop: zyklisches vs. periodisches Verhalten

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & p \\ 0 & 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix}$$

# $C_{14}$ Isotop

Periodische Markov-Kette mit zyklischer Matrix:

$$T^{111} = T^3 \cdot T^{108} = T^3 \cdot T^{3 \cdot 36} = T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & p \\ 0 & 0 & 1-p & 1-p \end{pmatrix}$$

# $C_{14}$ Isotop

Sei $\vec{u} \neq \vec{0}$ Eigenwert.

Es gilt $T^4 = T$:

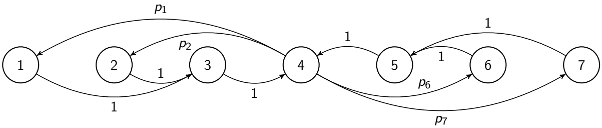
$$T^4 \cdot \vec{u} = \lambda^4 \cdot \vec{u} = T \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \left(\lambda^4 - \lambda\right) \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^4 - \lambda = 0$$

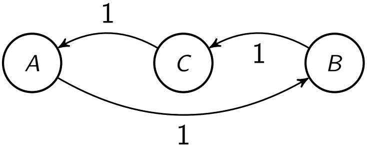
# $C_{14}$ Isotop

$$\lambda^4 - \lambda = \lambda \cdot \left(\lambda^3 - 1\right) = 0:$$

$\lambda_0 = 0$ und die drei Einheitswurzeln $\lambda_1 = 1$ und
$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\left(\tfrac{k \cdot 2\pi}{3}\right), i \cdot \sin\left(\tfrac{k \cdot 2\pi}{3}\right)\right),\ k = 1, 2$$

# Periodische Markov-Ketten, “pseudozyklisch”




Periodizitätklassen der Zustände:
$A = \{1, 2, 6, 7\}$; $B = \{3, 5\}$; $C = \{4\}$.

“Pseudozyklische” Blockmatrix: $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}$.

# Ehrenfest-Modell





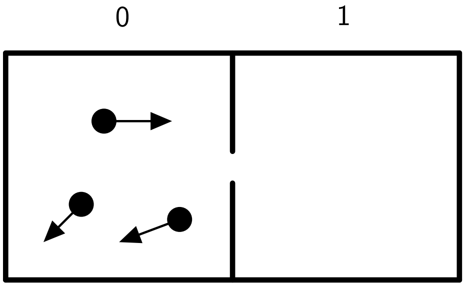
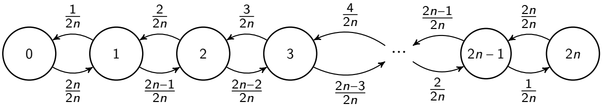



Abbildung: Drei Moleküle in Kammer 0

$2n$ Moleküle seien anfänglich in der Kammer 0. Wie entwickelt sich langfristig die Verteilung der Moleküle auf die zwei Kammern? Ist es unmöglich, dass alle Moleküle sich wieder in der Kammer 0 befinden? Die Zufallsvariable sei $X = \sharp$ Moleküle in Kammer 1.

# Ehrenfest-Modell

Das Urnenmodell von Paul und Tatiana Ehrenfest führt zu:



# Ehrenfest-Modell

Flussregel zwischen benachbarten Zuständen (gilt da geschlossenes System):

$$p_i \cdot \frac{2n-i}{2n} = \frac{i+1}{2n} \cdot p_{i+1}, \qquad p_{i+1} = \frac{2n-i}{i+1} \cdot p_i \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots$$

$$p_1 = \tfrac{2n}{1} \cdot p_0 = \binom{2n}{1} \cdot p_0$$

$$p_2 = \tfrac{2n-1}{1+1} \cdot p_1 = \tfrac{2n-1}{2} \cdot \tfrac{2n}{1} \cdot p_0 = \tfrac{2n \cdot (2n-1)}{2 \cdot 1} \cdot p_0 = \binom{2n}{2} \cdot p_0$$

$$p_3 = \tfrac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot p_0 = \binom{2n}{3} \cdot p_0$$

$$p_j = \binom{2n}{j} \cdot p_0.$$

Dabei ist $p_i$ die Wahrscheinlichkeit im Grenzfall im Zustand $i$ zu sein ($i$-te Komponente von der Grenzverteilung $\vec{v}_\infty$), d.h. $i$ Moleküle in Kammer 1.

# Ehrenfest-Modell

Es folgt: $p_j = \begin{pmatrix} 2n \\ j \end{pmatrix} \cdot 2^{-2n}, \quad j = 0, 1, \cdots, 2n$

Man kann zeigen, dass die mittlere Rückkehrzeit (ein Erwartungswert bezüglich der Anzahl Schritte, lies Zeit) gegeben ist durch:

$$m_j = \frac{1}{p_j} = \frac{2^{2n}}{\begin{pmatrix} 2n \\ j \end{pmatrix}}, \quad j = 0, 1, \cdots, 2n.$$

Mit der Stirlingschen Formel und $2n = N_A \cong 6,022 \cdot 10^{23}$ folgt für mittlere Rückkehrzeit von 0 Molekülen in Kammer 1:

$$m_0 = 2^{2n} = 2^{N_A} = 2^{6.022 \cdot 10^{23}} = 10^{\log\left(2^{6.022 \cdot 10^{23}}\right)}$$

$$= 10^{6.022 \cdot 10^{23} \log(2)} = 10^{1.813 \cdot 10^{23}} \text{ sec}$$

Dabei ist das geschätzte Alter des Universums $4.358 \cdot 10^{17}$ Sekunden! Der Prozess ist theoretisch Reversibel, widerspricht also nicht den 2. Hauptsatz der Wärmelehre.

# Vielen Dank und zum weiterlesen

Einführende Literatur und Schulbücher:


- Arthur Engel (1. Auflage 1976), Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, Klett Studienbücher, Stuttgart.
- Charles M. Grinstead, J. Laurie Snell (2nd edition 2003), Introduction to Probability, American Mathematical Society AMS.
- John G. Kemeny, J. Laurie Snell (Reprint 1976), Finite Markov Chains, Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo.
- James R. Norris (1st edition 1997), Markov Chains, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lambacher Schweizer (1. Auflage 2003), Stochastik, Klett, Stuttgart. [Neuere Ausgabe 2012]
- Elemente der Mathematik (1. Auflage 2003), Leistungskurs Stochastik, Schrödel, Hannover