

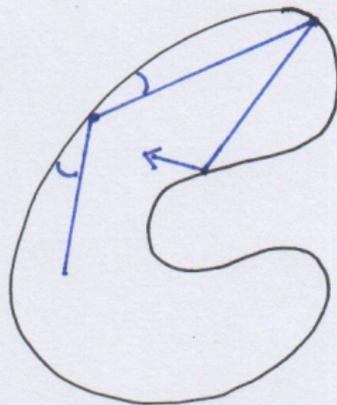
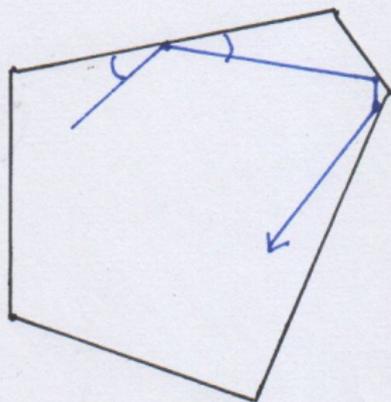
# Billard und Zahlentheorie

28. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

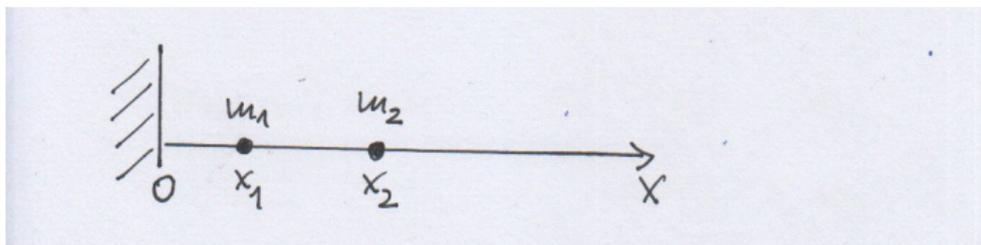
Kai Cieliebak

13. September 2017

# Allgemeine Billardtische



# Zwei Kugeln auf einer Halbgeraden



Energie- und Impulserhaltung:

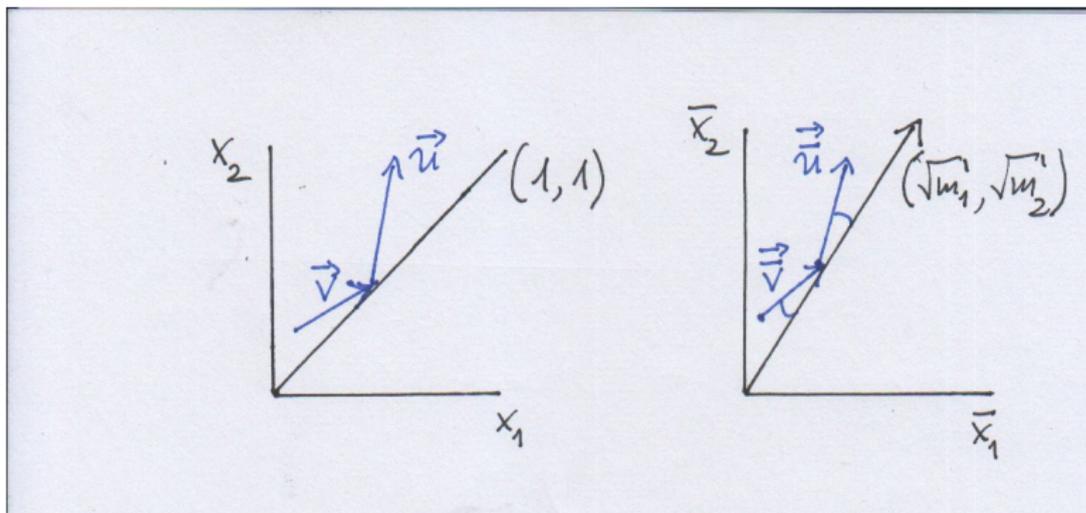
$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Starte mit  $v_1 = 0$ ,  $v_2 < 0$ . Anzahl der Zusammenstöße mit Wand und zweiter Kugel  $N = ?$

Beispiel: Für  $m_2 = 10^{12} m_1$  ist  $N = 3141592$ .

# Umformulierung als Billard in einer Ecke



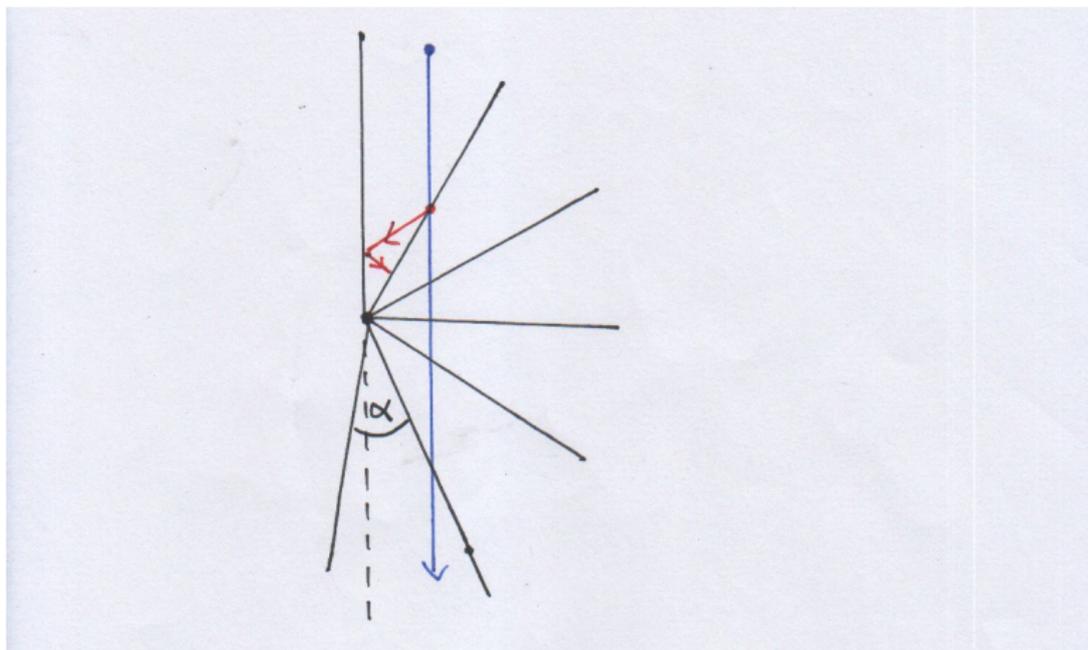
Reskalierung  $\bar{x}_i := \sqrt{m_i}x_i$  ergibt  $\bar{v}_i = \sqrt{m_i}v_i$ ,  $\bar{u}_i = \sqrt{m_i}u_i$  und

$$\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 \quad (\text{konstante Geschwindigkeit})$$

$$\sqrt{m_1}\bar{u}_1 + \sqrt{m_2}\bar{u}_2 = \sqrt{m_1}\bar{v}_1 + \sqrt{m_2}\bar{v}_2 \quad (\text{Reflexionsgesetz})$$

Billard in einer Ecke mit Winkel  $\alpha = \arctan \sqrt{m_1/m_2}$

# Entfaltungsmethode zur Berechnung der Anzahl $N$



$N$  ist die kleinste Zahl mit  $(N + 1)\alpha > \pi$ , also

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil - 1 = \left\lceil \frac{\pi}{\arctan \sqrt{m_1/m_2}} \right\rceil - 1.$$

# Entfaltungsmethode zur Berechnung der Anzahl $N$

**Satz.** Für  $m_2 = 100^k m_1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , besteht  $N$  genau aus den  $k + 1$  ersten Ziffern von  $\pi$ .

**Beweis** (bis auf die letzte Ziffer). Für jedes  $x > 0$  gilt:

$$0 < \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x$$

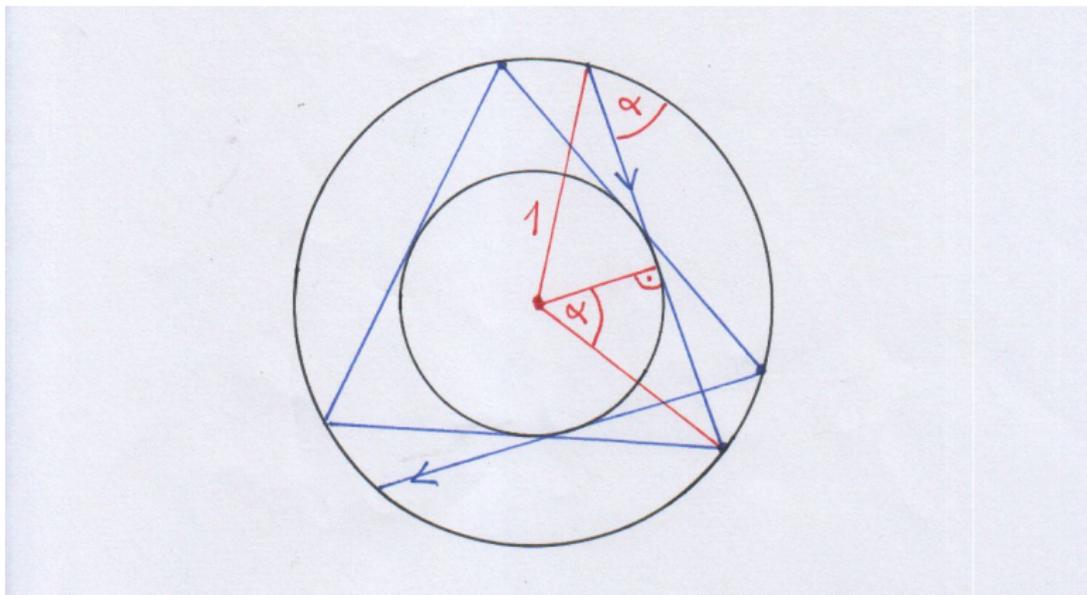
(Beweis durch Taylor-Entwicklung). Für kleines  $x$  folgt

$$\left\lceil \frac{\pi}{x} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\pi}{\arctan x} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\pi}{x} + \pi x \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\pi}{x} \right\rceil + 1,$$

also für  $x := 10^{-k}$  durch Subtraktion von 1

$$\left\lfloor 10^k \pi \right\rfloor \leq N \leq \left\lceil 10^k \pi \right\rceil.$$





- Satz (Jacobi):** (a) Für  $\alpha/\pi = p/q$  rational ist jede Billardbahn  $q$ -periodisch und umläuft den Kreis  $p$  mal.  
(b) Für  $\alpha/\pi$  irrational ist jede Billardbahn dicht im Ring zwischen den konzentrischen Kreisen vom Radius 1 und  $\cos \alpha$ .

**Beweis von (b).** Sei  $T_\theta(x) := x + \theta \pmod{2\pi}$  die Rotation des Kreises um den Winkel  $\theta := 2\alpha$ . Die Reflexionspunkte  $x_0, x_1, x_2, \dots$  der Billardbahn mit Startpunkt  $x$  sind dann

$$x_n = T_\theta^n(x) = x + n\theta \pmod{2\pi}.$$

$\theta/2\pi$  irrational  $\implies T_\theta^n(x) \neq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

$\implies$  Es gibt ein  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|T_\theta^{n_1}(x) - x| \leq \theta/2$

$\implies$  Eine Iteration von  $T_\theta$  hat die Form  $T_{\theta_1}$  mit  $\theta_1/2\pi$  irrational und  $|\theta_1| \leq \theta/2$

$\implies$  Eine Iteration von  $T_\theta$  hat die Form  $T_{\theta_2}$  mit  $\theta_2/2\pi$  irrational und  $|\theta_2| \leq \theta_1/2 \leq \theta/4$ , etc. □

**Satz (Kronecker und Weyl).** Für  $\alpha/\pi$  irrational sind die Reflexionspunkte  $x_0, x_1, x_2, \dots$  jeder Billardbahn auf dem Kreis **gleichverteilt**, d.h. für jeden Kreisbogen  $A$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(\{x_0, \dots, x_{n-1}\} \cap A) = \frac{|A|}{2\pi}.$$

**Beweis.** Folgt durch Anwendung auf die charakteristische Funktion von  $A$  aus  $\implies w_{i+n} = w_{j+n}$  der allgemeineren Aussage: Für jede Riemann-integrierbare Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Approximation von oben und unten durch stetig differenzierbare Funktionen

$\implies$  Reicht z.z. für  $f$  stetig differenzierbar und periodisch.

Uniforme Approximation durch Fourier-Reihen

$\implies$  Reicht z.z. für  $f(x) = e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$k = 0$ : Beide Seiten = 1.

$k \neq 0$ : Mit  $x_j = x + j\theta$ ,  $\theta = 2\alpha$ , und  $e^{ik\theta} \neq 1$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{ikx_j} &= \frac{e^{ikx}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{ik\theta})^j = \frac{e^{ikx}}{n} \frac{1 - e^{iknx}}{1 - e^{ik\theta}} \\ &\longrightarrow 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

## Anwendung: Anfangsziffern von Zweierpotenzen

Mit welcher relativen Häufigkeit kommen die Ziffern 1–9 als Anfangsziffern der Zweierpotenzen 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... vor?

# Anwendung: Anfangsziffern von Zweierpotenzen

Mit welcher relativen Häufigkeit kommen die Ziffern 1–9 als Anfangsziffern der Zweierpotenzen 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... vor?

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(k)$	.301	.176	.125	.097	.079	.067	.058	.051	.046

# Anwendung: Anfangsziffern von Zweierpotenzen

Mit welcher relativen Häufigkeit kommen die Ziffern 1–9 als Anfangsziffern der Zweierpotenzen  $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$  vor?

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(k)$	.301	.176	.125	.097	.079	.067	.058	.051	.046

**Korollar.**  $p(k) = \log_{10}(k+1) - \log_{10} k$ .

**Beweis.**  $2^n$  hat Anfangsziffer  $k$

$$\iff k \cdot 10^q \leq 2^n < (k+1) \cdot 10^q \text{ für ein } q \in \mathbb{N}_0$$

$$\iff \log_{10} k + q \leq n \cdot \log_{10} 2 < \log_{10}(k+1) + q \text{ für ein } q \in \mathbb{N}_0$$

$$\iff \text{Nachkommateil } \{n \cdot \log_{10} 2\} \in [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)[$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $p(k) = \log_{10}(k+1) - \log_{10} k$  nach dem Satz von Kronecker und Weyl, weil  $\log_{10} 2$  irrational ist.  $\square$

**Korollar:** Dieselbe Verteilung gilt für die Anfangsziffern der Fibonacci-Zahlen  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ .

**Beweis.** In

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

geht der zweite Term exponentiell gegen 0

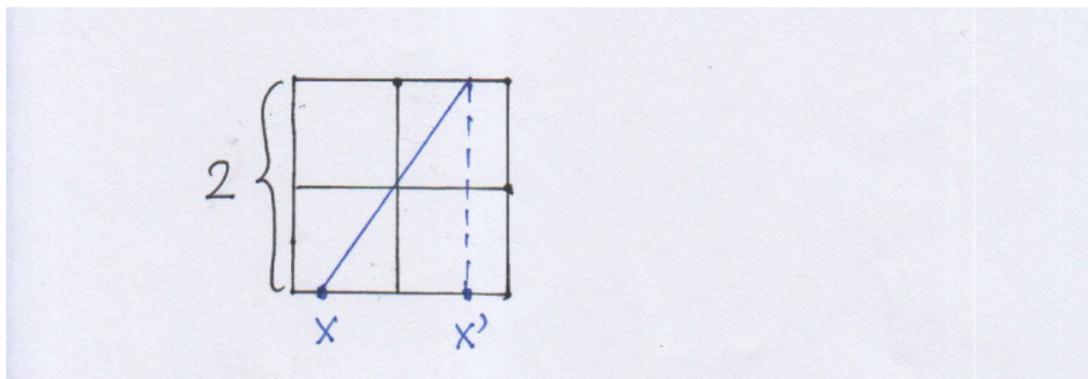
$\implies$  Die Verteilung der ersten Ziffern von  $f_n$  ist wie für die Folge  $\phi^n$  mit dem Goldenen Schnitt  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ .  $\square$

**Aber:** Die ersten Ziffern der Primzahlen haben **nicht** die Verteilung  $p(k)$  (Diaconis).

Simon Newcomb (1881) und Frank Benford (1938):  
Dieselbe Verteilung  $p(k)$  tritt in vielen Zahlenreihen der realen Welt auf wie Längen von Flüssen, Einwohnerzahlen von Städten, physikalischen Konstanten etc.

Erster Satz von Newcombes Artikel: *'That the ten digits do not occur with equal frequency must be evident to anyone making much use of logarithmic tables, and noticing how much faster the first pages wear out than the last ones.'*





$\cong$  Gerade von Steigung  $\mu$  im Torus  $(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\mathbb{Z})$

$\cong$  Kreisabbildung  $x' = x + 2/\mu \pmod{2}$ .

**Korollar:** (a) Für  $\mu$  rational sind alle Bahnen periodisch.

(b) Für  $\mu$  irrational sind alle Bahnen dicht und gleichverteilt im Quadrat. □

Sei  $L$  eine Gerade, die das Gitter  $\mathbb{Z}^2$  nicht trifft. Die **Schnittfolge**  $w$  von  $L$  ist das unendliche Wort  $w_1 w_2 w_3 \dots$  aus Nullen und Einsen für Reflexionen an horizontalen/vertikalen Seiten, z.B. im Bild  $w = 101101011 \dots$

**Satz:** Die Schnittfolge  $w$  einer Gerade mit irrationaler Steigung ist nicht **ultimativ periodisch** (d.h. periodisch nach einem endlichen Abschnitt), aber **quasiperiodisch** (d.h. jeder ihrer endlichen Abschnitte kommt unendlich oft vor).

**Beweis:** (a) Annahme:  $w$  ultimativ periodisch.

Periode aus  $p$  Nullen und  $q$  Einsen

$\implies$  Zu einer Periode gehörendes Geradenstück hat Steigung  $\frac{p \pm 1}{q \pm 1}$

$\implies$  Zu  $n$  Perioden gehörendes Geradenstück hat Steigung  $\frac{np \pm 1}{nq \pm 1}$

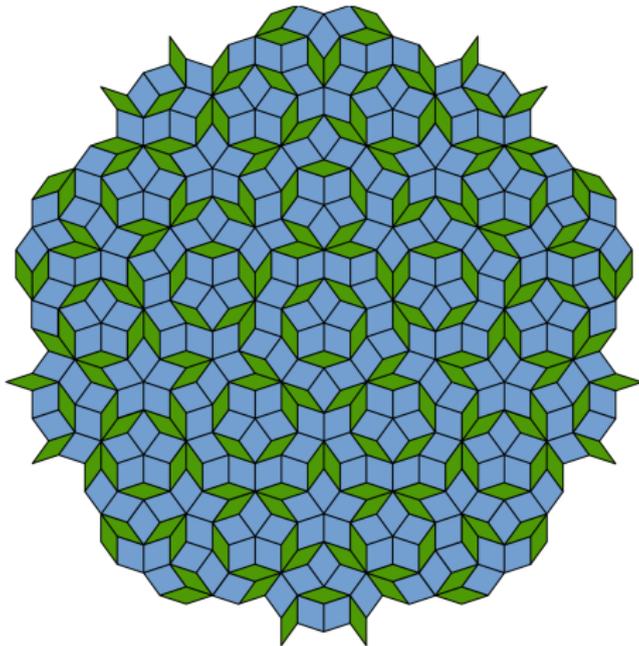
$\implies$  Gerade hat Steigung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{np \pm 1}{nq \pm 1} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ .

(b) Sei  $L_1$  endlicher Abschnitt von  $L$ .  $L_1$  trifft das Gitter  $\mathbb{Z}^2$  nicht  
 $\implies$  Jedes Geradenstück parallel und hinreichend nahe zu  $L_1$  hat dieselbe Schnittfolge

Weil  $L$  dicht im Quadrat ist, kommen unendlich viele solche Geradenstücke in  $L$  vor. □

Die Orthogonalprojektion der unteren Treppe von  $L$  auf  $L$  definiert einen eindimensionalen **Quasikristall**.

Zweidimensionales Analogon: Die Orthogonalprojektion vom 5-dimensionalen Gitter  $\mathbb{Z}^5$  auf einen geeigneten 2-dimensionalen Unterraum definiert die Penrose-Parkettierung der Ebene.



Die **Komplexitätsfunktion**  $K(n)$  einer Folge  $w = w_1 w_2 w_3 \dots$  aus Nullen und Einsen ist die Anzahl der verschiedenen Abschnitte der Länge  $n$  in  $w$ .

Offenbar ist  $K(n) \leq 2^n$ , mit Gleichheit genau dann, wenn jedes endliche Wort in  $w$  vorkommt. Es ist eine offene Frage, ob die Binärdarstellung von  $\pi$  diese Eigenschaft hat.

**Lemma:** Eine Folge  $w$  ist genau dann ultimativ periodisch, wenn  $K(n) \leq n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Beweis:**  $\implies$ :  $w$  sei ultimativ periodisch mit Präfix von Länge  $p$  und Periode von Länge  $q$ . Dann ist  $K(n) \leq p + q \leq n$  für  $n \geq p + q$ .

$\Leftarrow$ : Sei  $w$  nicht ultimativ periodisch.

Behauptung:  $K(n+1) > K(n)$  für alle  $n$ .

Wegen  $K(1) > 1$  folgt daraus  $K(n) \geq n+1$  für alle  $n$ .

Beweis der Behauptung: Falls  $K(n+1) = K(n)$ , so hat jeder Abschnitt der Länge  $n$  eine eindeutige rechtsseitige Fortsetzung zu einem Abschnitt der Länge  $n+1$ . Seien  $w_i \dots w_{i+n-1}$  und  $w_j \dots w_{j+n-1}$  zwei identische Abschnitte der Länge  $n$ .

$\implies w_{i+n} = w_{j+n} \implies w_{i+n+1} = w_{j+n+1}$  etc

$\implies w_{i+k} = w_{j+k}$  für alle  $k \geq 0$ , d.h.  $w$  ist ultimativ periodisch mit Periode  $w_i \dots w_{j-1}$ . □

# Komplexität einer Schnittfolge

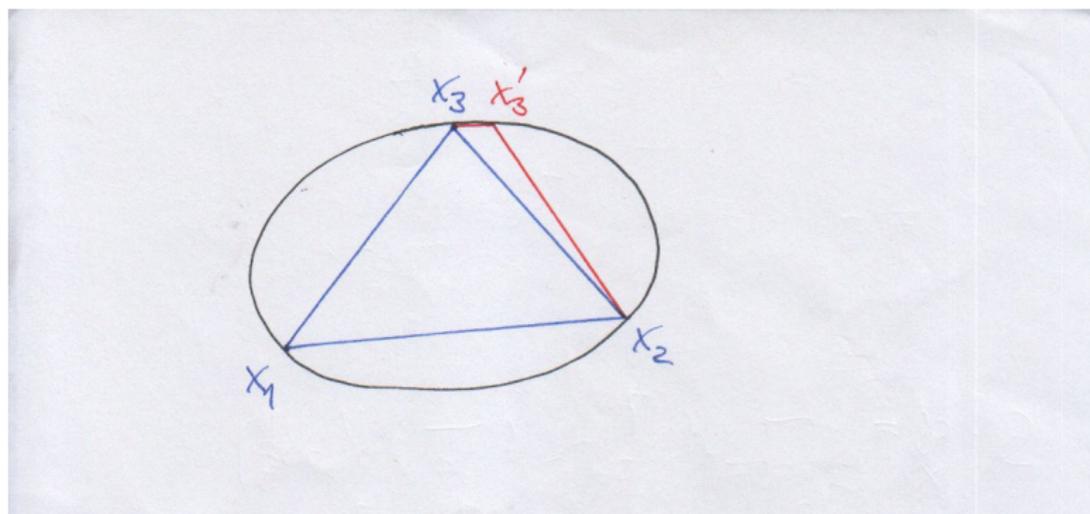
**Satz:** Die Schnittfolge  $w$  einer Gerade mit irrationaler Steigung hat die Komplexitätsfunktion  $K(n) = n + 1$ .

**Beweis:** Betrachte die Schar  $L_t$  der zu  $L$  parallelen Geraden mit Anfangspunkten auf der Diagonalen zwischen  $(0, 0)$  und  $(-1, 1)$ .

$$\begin{aligned}K(n) &= \#\{\text{verschiedene Wörter der Länge } n \text{ in } L\} \\&= \#\{\text{verschiedene Anfangswörter der Länge } n \text{ in den } L_t\} \\&= \#\{\text{von den } L_t \text{ getroffene Eckpunkte der} \\&\quad \text{ersten } n \text{ 'Diagonaltreppen'}\} + 1 \\&= n + 1.\end{aligned}$$



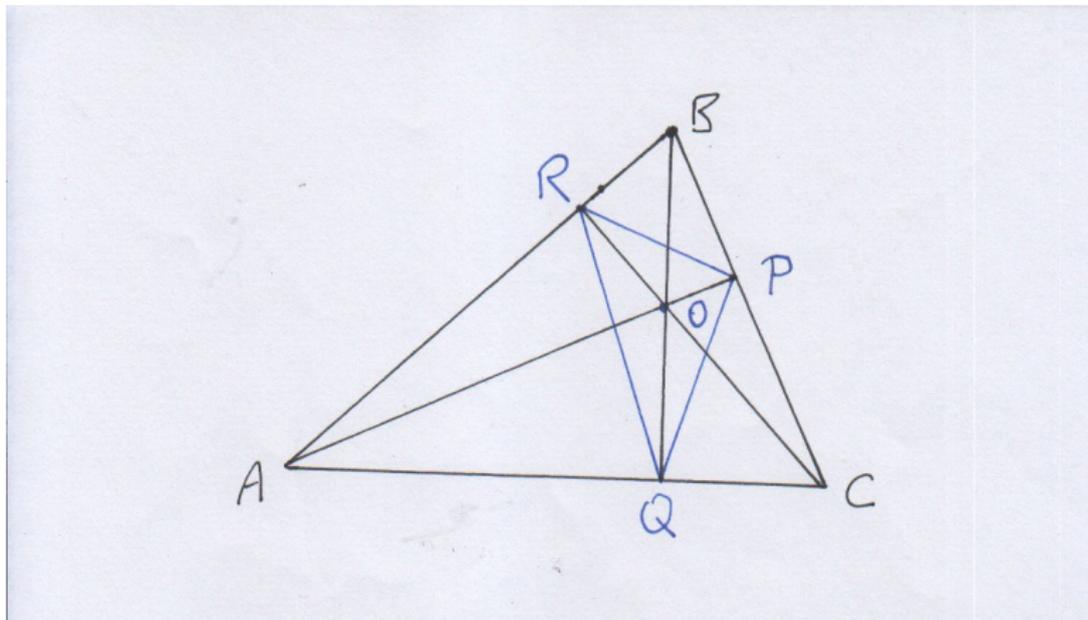
# Periodische Bahnen in konvexen Billards



**Satz:** In einem konvexen Billard mit glattem Rand existiert für alle teilerfremden  $q \geq 2$  und  $p \leq \lfloor (q-1)/2 \rfloor$  eine  $q$ -periodische Bahn mit Umlaufzahl  $p$ .

**Beweis:** Betrachte die Menge  $M$  aller einbeschriebenen  $q$ -Ecke mit Umlaufzahl  $p$  und ihren Abschluss  $\overline{M}$  in  $S^1 \times \dots \times S^1$  (in  $\overline{M}$  können Eckpunkte zusammenfallen). Die Längenfunktion nimmt auf der kompakten Menge  $\overline{M}$  ihr Maximum an. Das Maximum liegt im Inneren  $M$  von  $\overline{M}$  (siehe Bild) und definiert eine Billardbahn.  $\square$

# Periodische Bahnen in Dreiecken



**Satz:** In einem spitzwinkligen Dreieck ist das Dreieck, das die Fusspunkte der Höhen verbindet, eine 3-periodische Billardbahn.

Es ist eine offene Frage, ob es in einem stumpfwinkligen Dreieck mit Winkel  $> 100^\circ$  eine periodische Billardbahn gibt!

Vielen Dank!

Lit.: Serge Tabachnikov, Geometrie und Billard