

Change Ringing

die englische Art, Gruppen zu läuten

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

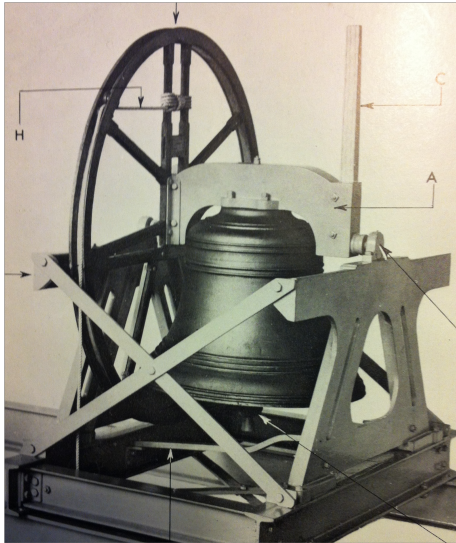
Erin Triples

Cambridge Minor

L. Halbeisen, TMU 2017

Turmglöcke in Ruhe

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten



Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Turmglöcke in Back- und Handstroke

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

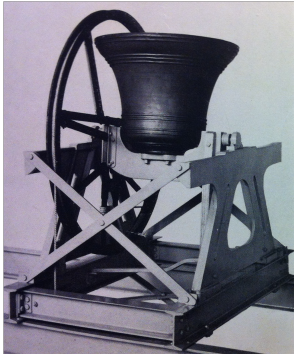
Plain Hunt on 5

Grandsire

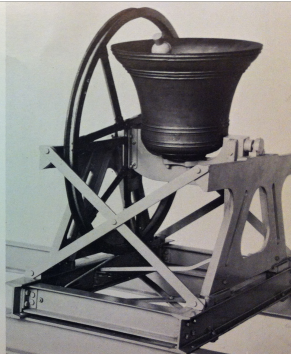
Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor



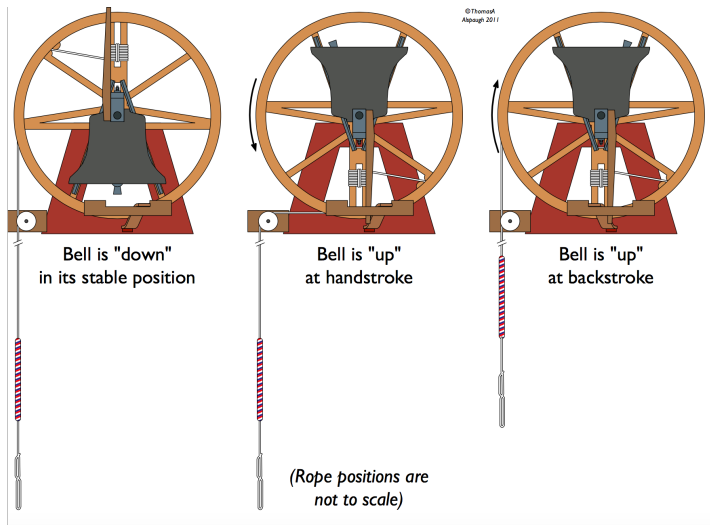
2a. A BELL SET AT BACKSTROKE



2b. A BELL SET AT HANDSTROKE

Turmglöcke in Ruhe, Hand- und Backstroke

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten



Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

By the campanologist, the playing of tunes is considered to be a childish game; the proper use of bells is to work out mathematical permutations and combinations.

Dorothy L. Sayers, *The Nine Tailors*, 1934

Die Permutationen von Plain Hunt

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

1 2 3 4 5 6 7 8

$$\rho = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$$

2 1 4 3 6 5 8 7

$$\tau = (2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)$$

2 4 1 6 3 8 5 7

ρ

...

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

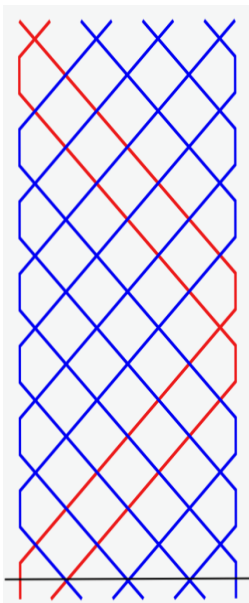
Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Course of Plain Hunt on 8

1 2 3 4 5 6 7 8
2 1 4 3 6 5 8 7
2 4 1 6 3 8 5 7
4 2 6 1 8 3 7 5
4 6 2 8 1 7 3 5
6 4 8 2 7 1 5 3
6 8 4 7 2 5 1 3
8 6 7 4 5 2 3 1
8 7 6 5 4 3 2 1
7 8 5 6 3 4 1 2
7 5 8 3 6 1 4 2
5 7 3 8 1 6 2 4
5 3 7 1 8 2 6 4
3 5 1 7 2 8 4 6
3 1 5 2 7 4 8 6
1 3 2 5 4 7 6 8
1 2 3 4 5 6 7 8



Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Bob Major (8 Glocken)

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Lead-End Plain Hunt

1 **3** **2** **5** **4** **7** **6** **8**

$$\tau = (2\ 3)(4\ 5)(6\ 7)$$

1 **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8**

5 **3** **7** **1** **8** **2** **6** **4**

3 **5** **1** **7** **2** **8** **4** **6**

3 **1** **5** **2** **7** **4** **8** **6**

1 **3** **2** **5** **4** **7** **6** **8**

1 **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8**

2 **1** **4** **3** **6** **5** **8** **7**

2 **4** **1** **6** **3** **8** **5** **7**

4 **2** **6** **1** **8** **3** **7** **5**

Lead-End Plain Bob

1 **3** **2** **5** **4** **7** **6** **8**

$$\pi = (3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$$

1 **3** **5** **2** **7** **4** **8** **6**

5 **3** **7** **1** **8** **2** **6** **4**

3 **5** **1** **7** **2** **8** **4** **6**

3 **1** **5** **2** **7** **4** **8** **6**

1 **3** **2** **5** **4** **7** **6** **8**

1 **3** **5** **2** **7** **4** **8** **6**

3 **1** **2** **5** **4** **7** **6** **8**

3 **2** **1** **4** **5** **6** **7** **8**

2 **3** **4** **1** **6** **5** **8** **7**

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Bob Minor (6 Glocken)

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Die Permutationen

$$\rho = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \text{ und } \tau = (2\ 3)(4\ 5)$$

sind Elemente von S_6 mit

$$\rho^2 = \tau^2 = \iota.$$

Die von ρ und τ erzeugte Gruppe

$$H := \langle \rho, \tau \rangle = \{ \rho, \tau, \rho\tau, \tau\rho, \rho\tau\rho, \dots \}$$

ist eine Untergruppe von S_6 der Ordnung 12.

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Bob Minor

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

1. Lead: Beginnt mit **1 2 3 4 5 6**, alle Elemente aus H werden geläutet.

2. Lead: Beginnt mit **1 3 5 2 6 4**, alle Elemente aus der Nebenklasse aH werden geläutet, wobei

$$a = (2\ 4\ 6\ 5\ 3).$$

3. Lead: Beginnt mit **1 5 6 3 4 2**, die Nebenklasse a^2H wird geläutet.

4. Lead: Die Nebenklasse a^3H wird geläutet.

5. Lead: Die Nebenklasse a^4H wird geläutet, welche mit Rounds endet.

Insbesondere führt PPPPP zu Rounds.

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Bob Minor

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

S_6 hat 720 Elemente; in S_6 gibt es also $720 : 12 = 60$
Nebenklassen von H .

Wie erreichen wir die anderen Nebenklassen?

Plain Lead-End

1 3 2 5 4 6

$$\pi = (3\ 4)(5\ 6)$$

1 3 5 2 6 4

3 1 5 2 6 4

1 3 2 5 4 6

1 3 5 2 6 4

3 1 2 5 4 6

Bob Lead-End

1 3 2 5 4 6

$$\beta = (2\ 3)(5\ 6)$$

1 2 3 5 6 4

3 1 5 2 6 4

1 3 2 5 4 6

1 2 3 5 6 4

2 1 5 3 4 6

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Bob Minor

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Starten wir mit Rounds, so beginnt, nach einem Bob, der
2. Lead mit

1 2 3 5 6 4

und somit werden im 2. Lead alle Elemente aus der
Nebenklasse bH geläutet, wobei

$$b = (4\ 6\ 5).$$

Da b die Ordnung 3 hat führt BBB zu Rounds.

Lässt sich mit Plain & Bob die ganze Gruppe S_6 läuten?

Nein: Sowohl $\pi = (3\ 4)(5\ 6)$ wie auch $\beta = (2\ 3)(5\ 6)$ sind
gerade Permutationen. Damit ist sowohl die letzte wie auch
die erste Permutation eines Leads immer gerade.

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Bob Minor

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Single Lead-End

1 3 2 5 4 6

$$\sigma = (5\ 6)$$

1 3 2 5 6 4

3 1 5 2 6 4

1 3 2 5 4 6

1 3 2 5 6 4

3 1 5 2 4 6

Starten wir mit Rounds, so beginnt, nach einem Single, der 2. Lead mit

1 3 2 5 6 4

und somit werden im 2. Lead alle Elemente aus der Nebenklasse cH geläutet, wobei

$$c = (2\ 3)(4\ 6\ 5).$$

Weil $b = (4\ 6\ 5)$, ist $c b c = \iota$, d.h. SBS führt zu Rounds.

Mit Plain-, Bob-, und Single-Ends lässt sich S_6 läuten.

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

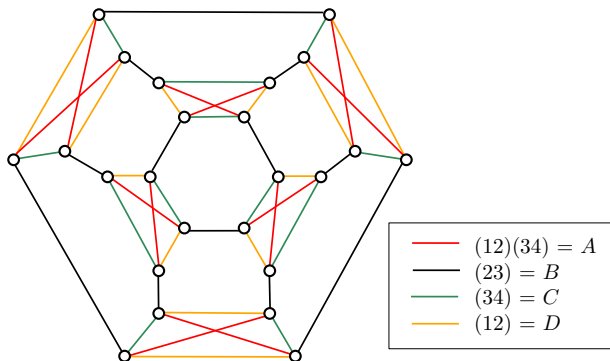
Cambridge Minor

Minimus (4 Glocken)

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

S_4 ist isomorph zur Würfelgruppe.

Vollständiger Ringing-Cayley-Graph von S_4 :



Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

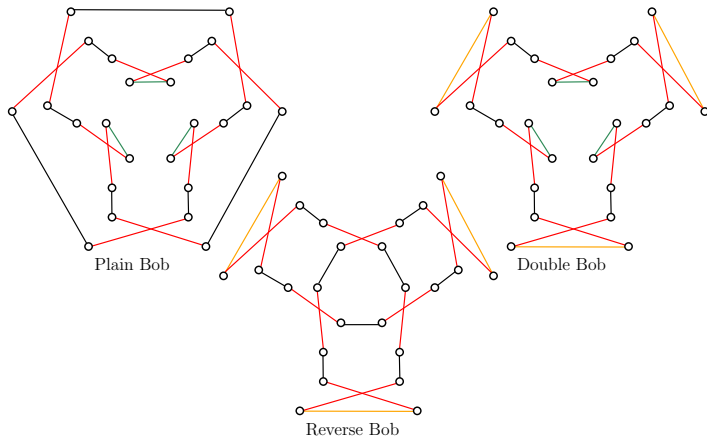
Erin Triples

Cambridge Minor

Minimus

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Ringling-Cayley-Graph einiger Methoden:



Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

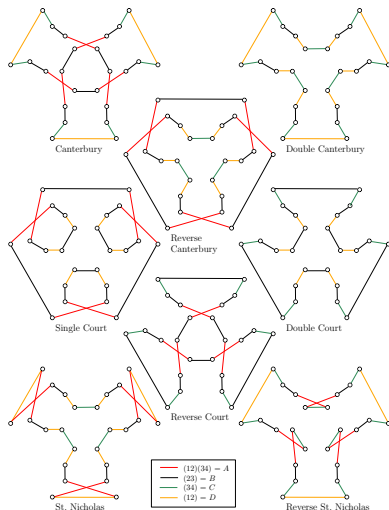
Erin Triples

Cambridge Minor

Minimus

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Ringling-Cayley-Graph weiterer Methoden:



Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Plain Hunt on 5 (mit Cover Bell)

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

1 2 3 4 5 6

$$\rho = (1\ 2)(3\ 4)$$

2 1 4 3 5 6

$$\tau = (2\ 3)(4\ 5)$$

2 4 1 5 3 6

ρ

...

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Grandsire Doubles

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

- ▶ Grandsire Doubles ist im Wesentlichen Plain Hunt on 5.
- ▶ Ausnahme: In jedem Lead wird die erste Permutation $\rho = (1\ 2)(3\ 4)$ durch $\bar{\rho} = (1\ 2)(4\ 5)$ ersetzt.
- ▶ $K := \{\bar{\rho}, \bar{\rho}\tau, \bar{\rho}\tau\rho, \bar{\rho}\tau\rho\tau, \dots\}$ ist **keine** Untergruppe von S_5 .
- ▶ Starten wir mit Rounds, so werden nacheinander die Elemente aus K , aK , a^2K geläutet mit

$$a = (3\ 4\ 5).$$

- ▶ **Bob**: Die letzte Permutation ρ wird durch $\bar{\rho}$ ersetzt.
- ▶ Starten wir mit Rounds, so werden mit lauter Bobs nacheinander die Elemente aus K und bK geläutet mit

$$b = (2\ 4)(3\ 5).$$

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Grandsire Doubles

1 2 3 4 5
~~2 1 3 5 4~~
~~2 3 1 4 5~~
3 2 4 1 5
3 4 2 5 1
4 3 5 2 1
~~4 5 3 1 2~~
5 4 1 3 2
~~5 1 4 2 3~~
1 5 2 4 3
~~1 2 5 3 4~~
2 1 5 4 3
2 5 1 3 4
5 2 3 1 4
~~5 3 2 4 1~~
3 5 4 2 1
3 4 5 1 2
4 3 1 5 2
4 1 3 2 5
1 4 2 3 5

1 2 4 5 3
~~2 1 4 3 5~~
~~2 4 1 5 3~~
4 2 5 1 3
4 5 2 3 1
5 4 3 2 1
~~5 3 4 1 2~~
3 5 1 4 2
3 1 5 2 4
1 3 2 5 4
~~1 2 3 4 5~~

Bob
4 3 5 2 1
~~4 5 3 1 2~~
5 4 1 3 2
5 1 4 2 3
1 5 4 3 2
~~1 4 5 2 3~~
4 1 5 3 2
4 5 1 2 3
5 4 2 1 3
5 2 4 3 1

Single
4 3 5 2 1
~~4 5 3 1 2~~
5 4 1 3 2
5 1 4 2 3
1 5 4 3 2
~~1 5 4 2 3~~
5 1 4 3 2
5 4 1 2 3
4 5 2 1 3
4 2 5 3 1

Mit einer Kombination von Plain-Ends und Bob-Ends lassen sich alle 60 Permutationen von A_5 läuten; zum Beispiel mit PBPBPB.

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Grandsire Triples

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

1 234567	1 253746	1 275634	1 267453	1 246375
2 135476	2 157364	2 176543	2 164735	2 143657
2 314567	2 513746	2 715634	2 617453	2 416375
3 241657	3 231476	3 251364	3 271543	3 261735
3 426175	3 5324167	3 7523146	3 6725134	3 4627153
4 362715	4 3542617	4 5732416	4 7652314	4 6472513
4 637251	4 3456271	4 5374261	4 7563241	4 6745231
6 473521	6 4365721	6 3547621	6 5736421	6 7654321
6 745312	6 4637512	6 3456712	6 5374612	6 7563412
7 654132	7 6473152	7 4365172	7 3547162	7 5736142
7 561423	7 6741325	7 4631527	7 3451726	7 5371624
5 716243	5 7614235	5 6413257	5 4315276	5 3517264
5 172634	5 7162453	5 6142375	5 4132567	5 3152746
1 527364	1 726543	1 624735	1 423657	1 325476
1234567	1234567	1234567	1234567	1234567

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

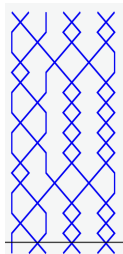
Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Ist es möglich mit einer Kombination von Plain-Ends und Bob-Ends mit Grandsire Triples alle 5040 Permutationen von S_7 zu läuten?

Stedman Triples



1234567	5471326	3165742	7523614
2135476	4573162	1367524	5726341
2314567	4751326	1635742	5273614
3241657	7415236	6153472	2537164
2346175	4712563	1654327	5231746
2431657	4175236	1563472	5327164
4236175	1472563	5164327	3521746
4321657	1745236	5613472	3257164
3426175	7142563	6514327	2351746
4362715	1724653	5641237	3215476
4637251	1276435	5462173	3124567
6432715	2174653	4561237	1325476
<u>6347251</u>	<u>2716435</u>	<u>4652173</u>	<u>1234567</u>
3642715	7214653	6451237	
3467251	7126435	6542173	
4376521	1762345	5624713	
3475612	7163254	6527431	
3746521	7612345	6254713	
7345612	6713254	2657431	
7436521	6172345	2564713	
4735612	1673254	5267431	
7453162	6137524	2576341	
7541326	6315742	2753614	
<u>5743162</u>	<u>3617524</u>	<u>7256341</u>	

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

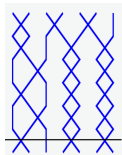
Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Erin Triples

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten



1234567	6745231	3152746
2143657	7654321	1325476
1216375	6753412	3124567
1423657	6574321	3215476
4126375	5673412	2314567
4213657	5764321	2135476
<hr/>	<hr/>	<hr/>
2416375	7563412	1234567
4261735	5736142	
2467153	7531624	
2641735	7356142	
6247153	3751624	
6421735	3576142	
<hr/>	<hr/>	
4627153	5371624	
6472513	3517264	
4675231	5312746	
4762513	5137264	
7465231	1532746	
7642513	1357264	

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

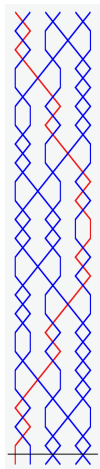
Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor

Cambridge Surprise Minor

Change Ringing,
die englische Art,
Gruppen zu läuten



123456	156342	142635	135264	164523
214365	513624	416253	312546	615432
124635	153264	146523	132456	165342
216453	512346	415632	314265	613524
261435	521364	451623	341256	631542
624153	253146	546132	432165	365124
621435	251364	541623	431256	361542
264153	523146	456132	342165	635124
624513	253416	546312	432615	365214
265431	524361	453621	346251	632541
256413	542316	435612	364215	623514
524631	453261	346521	632451	265341
256431	542361	435621	364251	623541
524613	453216	346512	632415	265314
542631	435261	364521	623451	256341
456213	342516	635412	264315	523614
546123	432156	365142	624135	253164
451632	341265	631524	261453	521346
456123	342156	635142	264135	523164
541632	431265	361524	621453	251346
514623	413256	316542	612435	215364
156432	142365	135624	164253	123546
516342	412635	315264	614523	213456
153624	146253	132546	165432	124365
				123456

Anfänge

Plain Hunt on 8

Plain Bob

Minimus

Plain Hunt on 5

Grandsire

Stedman Triples

Erin Triples

Cambridge Minor