Teil (E) Auseinandersetzung mit Mathematik

Meist geht es nicht primär darum, einen Beweis zu "erlernen", sondern einen solchen zu verstehen und selber Beweise zu entwickeln. Das Verstehen oder Entwickeln eines Beweises ist nur dann möglich, wenn sich die Lernenden intensiv mit dem entsprechenden mathematischen Sachverhalt auseinandersetzen. In der Auseinandersetzung können immer neue Facetten der Mathematik entdeckt werden, die wiederum zum Nachdenken anregen.

Beispielhaft soll hier gezeigt werden, welche Methoden Mittelschullehrpersonen einsetzen können, wenn im Unterricht mit Beweisen gearbeitet wird.

Beispiel: Themenbereich irrationale Zahlen

Ein Klassiker unter den Beweisen ist sicherlich jener, der nachweist, dass die Zahl $\sqrt{2}$ irrational ist. Überhaupt bietet das Thema "irrationale Zahlen" viel Potential, wenn es darum geht, Lernenden die Mathematik nahezubringen[1].

Zunächst einmal ist es natürlich wichtig festzuhalten, dass es irrationale Zahlen gibt.

> Eine irrationale Zahl x kann nicht auf die Form $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gebracht werden. Die Dezimalzahldarstellung einer solchen Zahl ist weder abbrechend noch wird sie periodisch.

Beispielsweise ist also die Zahl $0.101001000100001\ldots$ irrational.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Hier der Beweis in aller Kürze.

> Behauptung: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.
>
> Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gibt es natürliche Zahlen p und q mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Diese Gleichung formen wir um zu $2q^2 = p^2$. p^2 und q^2 sind natürliche Zahlen, also existiert deren Primfaktorzerlegung, wobei jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorkommt. In der Primfaktorzerlegung von $2q^2$ erscheint der Faktor 2 also in ungerader Anzahl, in jener von q^2 in gerader Anzahl. Die Gleichung $2q^2 = p^2$ ist demnach in den natürlichen Zahlen nicht lösbar. Also ist $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar und demnach irrational. □

Man kann die Definition der irrationalen Zahlen und den Irrationalitätsbeweis in kurzer Zeit an die Wandtafel schreiben, und eventuell haben dann vereinzelt Lernende gar den Eindruck, sie hätten etwas verstanden – und viele andere gelangen zur Einsicht, dass sie die Mathematik eh nicht verstehen. Tatsächlich treffen beide Eindrücke wohl in den seltensten Fällen zu. Daher ist es unsere Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern die mathematischen Objekte und Argumentationen zugänglich zu machen.

Das Ziel, den Lernenden diese Definition und den Beweis, diese mathematische Argumentation klar zu machen, kann erreicht werden, in dem intelligente, herausfordernde Fragen formuliert werden, welche zum Nachdenken, zur eingangs erwähnten intensiven Beschäftigung mit der Argumentation führen.

[1] Leider gehen viele Lehrmittel nicht auf dieses Thema ein. Unter dem Titel "Irrationale Zahlen" werden oft lediglich Termumformungen mit Wurzeltermen geübt. Es gehört zum mathematischen Allgemeinwissen (und darum geht es im Mittelschulunterricht), dass Lernende den Unterschied zwischen einer rationalen und einer irrationalen Zahl kennen und verstehen, welche rechnerischen Konsequenzen es hat, wenn eine Zahl irrational ist.

Mögliche Frageformen

Es gibt die Möglichkeit, Aussagen zu formulieren, welche die Lernenden dann als **wahre oder unwahre** Aussagen erkennen müssen. Hier einige Beispiele im Umfeld des vorgestellten Beweises.

1. $\frac{5}{0}$ ist eine irrationale Zahl.

2. $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ist ein Bruch, also eine rationale Zahl.

3. Bei der handschriftlichen Division 13:43 können nur die Reste Null bis 42 vorkommen, die Dezimalzahldarstellung von $\frac{13}{43}$ muss also periodisch werden.

Mit solchen richtig / falsch Aufgaben kann man sehr effizient auf Fehlvorstellungen von Lernenden eingehen. Für viele ist beispielsweise nicht wirklich klar, was man unter einem „Bruch“ zu verstehen hat. Viele haben es sich nie genau überlegt, welche Reste bei einer Division auftauchen können und welche Konsequenzen dies hat.

Man kann auch direkt **Beweise** verlangen:

1. Beweise, dass es unendlich viele irrationale Zahlen gibt.

2. Beweise, dass $\sqrt{12}$ irrational ist.

3. Beweise: $\sqrt[3]{m}$ ist irrational, falls m keine Kubikzahl ist.

Mit solchen Aufgabenstellungen, vor allem dann, wenn sie von den Lernenden vorgetragen werden müssen, erreicht man, dass diese sich gründlich mit den einzelnen Schritten einer Argumentation auseinandersetzen und auch die gesamte Beweiskonstruktion im Auge haben müssen.

Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler zu einer Aussage Stellung beziehen müssen, sind besonders lernwirksam, weil eigene Strategien zu deren Bewältigung entwickelt werden müssen. Zudem wird das Ziel nicht vorgegeben: Die Lernenden müssen zunächst selber zu einer Behauptung gelangen und diese dann beweisen. Man nennt solche Fragestellungen auch **Selbsterklärungen**.

1. Roman behauptet: *Eine irrationale Zahl ist eine Zahl, bei der die Dezimalschreibweise kein Muster aufweist.* Beziehen Sie kritisch Stellung zu dieser Aussage.

2. Peter versteht nicht, weshalb die Gleichung $2 \cdot q^2 = p^2$ keine Lösung haben soll. Man kann, so seine Argumentation, $q = \sqrt{2}$ und $p = 1$ setzen, und dann ist die Gleichung gelöst. Stimmt das?

Auch falsche „Beweise“ helfen den Lernenden, sich vertieft mit mathematischen Sachverhalten auseinanderzusetzen.

3. Karin behauptet, dass auch die Zahl $\sqrt{4}$ irrational sei und beweist dies so: Ich nehme an, es gäbe natürliche Zahlen p und q mit $\frac{p}{q} = \sqrt{4}$. Dann quadriere ich die Gleichung und multipliziere sie mit q^2. So erhalte ich $p^2 = q^2 \cdot 4$, und diese Gleichung kann keine Lösung haben, weil in der Primfaktorzerlegung von p^2 die Zahl 4 in gerader Anzahl vorkommt, in der Primfaktorzerlegung von $q^2 \cdot 4$ jedoch in ungerader Anzahl.
   Ist $\sqrt{4}$ tatsächlich irrational? Und falls nicht: was stimmt nicht an Karins „Beweis“?

Alle diese Frageformen und Aufgabenstellungen eignen sich sehr gut auch für Prüfungsaufgaben.

Im Folgenden nun ein bunter Mix aus Fragestellungen quer durch die Mittelschulmathematik.

Bunter Mix aus bewährten Aufgaben

Beweise.

1. Beweisen Sie, dass der Graph jeder Logarithmusfunktion streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist.

2. Beweisen Sie, dass die Graphen von f und f^{-1} achsensymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verlaufen.

3. Leiten Sie die Quotientenregel der Differentialrechnung aus der Ketten- und der Produkteregel her.

4. Beweisen Sie das Logarithmengesetz $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$. An welcher Stelle spielt welches Potenzgesetz eine entscheidende Rolle?

5. Beweisen Sie die Richtigkeit der Formel $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ für das $n-$ te Reihenglied einer geometrischen Reihe. Welche Einschränkungen gelten für die vorkommenden Grössen?

6. Vermuten Sie einen Grenzwert für die Folge $a_n = \frac{5n+3}{3n-2}$ und beweisen Sie Ihre Vermutung mit einem $\varepsilon -$ Argument.

7. Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel $\sin(\alpha) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, indem Sie am Einheitskreis argumentieren.

8. Auf Wikipedia findet man folgenden Artikel:
   Im Babylonischen Talmud (Der Talmud ist eines der bedeutendsten Schriften des Judentums und entstand in der ersten Jahrhunderten nach Christus) findet sich eine Teilbarkeitsregel für 7, bei der man letztendlich nur überprüfen muss, ob eine zweistellige Zahl durch 7 teilbar ist. Dazu wird eine Zahl an der vorletzten Stelle in zwei Teile aufgespalten. Die Ziffern vor der vorletzten Stelle bilden die Zahl a *und die letzten beiden Ziffern die Zahl* b*. 3815 wird beispielsweise in die Zahlen* $a = 38$ *und* $b = 15$ *zerlegt. Nun zählt man* b *und das Doppelte von* a *zusammen. Ist die Summe durch 7 teilbar, so ist auch die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar.*
   Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Regel.

9. Zeichnen Sie zwei verschieden lange, parallele Strecken und beweisen Sie, dass beide Strecken aus gleich vielen Punkten bestehen.

10. Beweisen Sie: Für alle $x, a > 0$ gilt: Falls x kleiner ist als $\sqrt{a}$, so ist $\frac{x}{a}$ grösser als $\sqrt{a}$.

11. Leiten Sie die Newton-Raphson-Formel her.

12. Beweisen Sie, dass der Binomialkoeffizient stets eine natürliche Zahl liefert.

13. Beweisen Sie, dass bei exponentiellen Zusammenhängen der Output bei regelmässiger Erhöhung des Inputs stets mit demselben Faktor multipliziert wird.

14. Jede Primzahl, die grösser als die Zahl 3 ist, lässt sich in eine der zwei Gruppen einteilen; die „$4k+1$“ Gruppe und die „$4k+3$" Gruppe. Beispiele:

    Die Zahl 41 gehört zur „$4k+1$“ Gruppe, weil mit $k=10$ gilt: $41=4\cdot 10+1$.

    Die Zahl 79 gehört zur „$4k+3$“ Gruppe, weil mit $k=19$ gilt: $79=4\cdot 19+3$.

    Beweisen Sie: Jede Primzahl, die grösser ist als 3, gehört entweder zur einen oder zur anderen Gruppe.

Behauptungen.

1. Paul behauptet: *Wenn man ein paar Primzahlen multipliziert und eins dazuzählt, so erhält man eine Primzahl.* Stimmts?

2. Maria soll in einer Prüfung die Definition der Konvergenz wiedergeben. Sie schreibt:

    Eine Folge a_n besitzt den Grenzwert g, falls es zu einer Zahl $\varepsilon > 0$ eine Eintauchzahl N gibt, so dass die Ungleichung $|g-a_n| < \varepsilon$ für alle Indizes $n > N$ gültig ist.

    Äussern Sie sich kritisch zu dieser Definition.

3. Armin behauptet, dass die Folge $a_n=(-1)^n$ konvergiere und zwei Grenzwerte habe. Was meinen Sie dazu?

4. Hans behauptet: Wenn eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, dann nähert sich die Folge unendlich nah an den Grenzwert an, ohne diesen zu erreichen. Ist das wahr?

5. Petra hat aus dem Unterricht die folgende Definition abgeschrieben:
    f hat an der Stelle a ein lokales Maximum, wenn es ein Intervall gibt, welches a enthält und wenn für jedes Element x aus diesem Intervall gilt: $f(x)\leq a$ und $f(x)=a \Rightarrow x=a$. Hat Peter richtig abgeschrieben?

6. Nadja behauptet, die Funktion $y=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\cdot 4^{\frac{2}{1-x}}$ sei keine Exponentialfunktion. Stimmts?

7. Yannick argumentiert: „Die Funktion $y=x^3-x$ ist bijektiv, weil die Funktion ungerade ist.“ Ist das eine gute Begründung? Falls nein, verbessern Sie sie bitte.

Richtig oder falsch?

1. Die Verkettung zweier linearer Funktionen ist kommutativ.

2. Eine bijektive Funktion hat höchstens eine Nullstelle.

3. Bei der Funktion $y=x^2$ hat ausser 0 jeder Funktionswert zwei Urbilder.

4. Stammfunktionen von linearen Funktionen sind stets quadratische Funktionen.

5. Die Zuordnung $f(x) = x^2$ ist keine Funktion, weil zwei verschiedene Elemente des Definitionsbereichs, nämlich 2 und -2, auf dasselbe Element des Wertebereichs abgebildet werden.

6. Die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ ist positiv.

7. Ist $f(a) = f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$, so berührt der Graph von f die x- Achse.

8. Es gibt eine rationale Zahl r, so dass $\exp(x) = r^x$ ist.

9. Es gibt zwei Funktionen f und g mit der Eigenschaft, dass $f \circ g$ für kein einziges $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

10. Eine stückweise lineare Funktion ist linear.

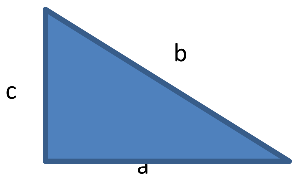
Falsche Beweise.

1. Klaus und Lea haben beide die gestellte Aufgabe gelöst. Beurteilen Sie die Lösungswege kritisch.

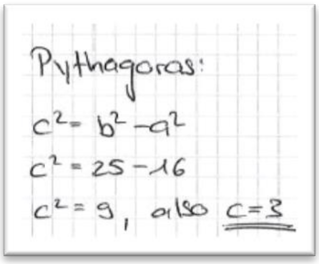
Berechne die Seitenlänge

von c, wenn $a = 4$ und

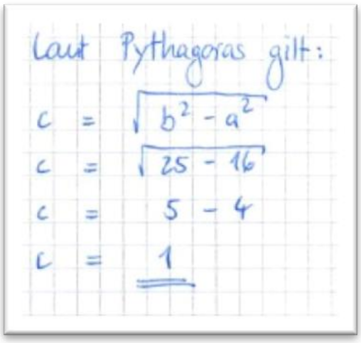
$b = 5$ ist.



Klaus löst die Aufgabe:



Lea löst die Aufgabe:



2. Robert beweist, dass $7(n+2)^2 + 2$ für jedes natürliche n durch 7 teilbar ist:

Ich nehme an, dass die Behauptung für die Zahl n gilt und will beweisen, dass sie dann auch für die Zahl n+1 richtig ist. Wenn ist an die Stelle von n eben n+1 einsetze, so erhalte ich $7\big((n+1)+2\big)^2 + 2 = 7(n+3)^2 + 2 = 7(n^2+6n+9) + 2 = 7n^2 + 42n + 63 + 2 = 7n^2 + 42n + 65$. *Nun will ich aus dem letzten Ausdruck die Zahl* $7(n+2)^2 + 2 = 7n^2 + 28n + 28 + 2 = 7n^2 + 28n + 30$ *aussortieren, damit ich die Induktionsvoraussetzung benutzen kann:*

$$7n^2 + 42n + 65 = (7n^2 + 28n + 30) + (14n + 35) = (7(n+2)^2 + 2) + 7(2n+5)$$

Nun weiss ich, dass, nach Induktionsvoraussetzung $7(n+2)^2 + 2$ *durch 7 teilbar ist. Offensichtlich ist auch* $7(2n+5)$ *durch 7 teilbar. Also habe ich die Behauptung bewiesen.*
Eric schütttelt den Kopf – das stimmt ja überhaupt nicht! Was läuft denn da schief?