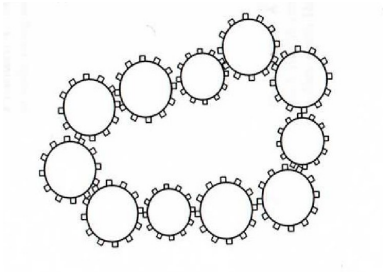
Universität Zürich
I·Math Institut für Mathematik

Junior Euler Society
MATHEMATICS

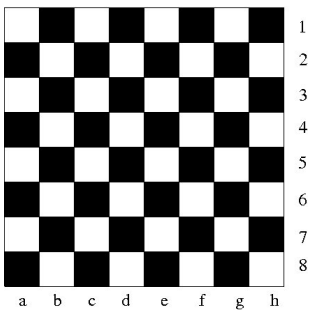
# Invarianten in der Mathematik

## Was ist eine Invariante?

**Aufgabe 1**
Können die 11 gezeichnenten Zahnräder sich gleichzeitig drehen?



**Aufgabe 2**
Kann ein Springer auf dem Schachbrett nach 23 Zügen in seine ursprüngliche Position gelangen?




**Aufgabe 3**
Das Produkt von 22 Zahlen ist 1. Kann ihre Summe gleich Null sein?

**Fazit:** Eine *Invariante* ist eine Zahl, die wir einer Klasse von Objekten zuordnen, und die sich unter bestimmten Transformationen nicht ändert.

# Äquivalenzrelationen

Eine Relation $\sim$ auf der Menge $M$ heisst Äquivalenzrelation, wenn für $a, b, c \in M$ gilt:

- **Reflexivität:** $a \sim a$
- **Symmetrie:** Aus $a \sim b$ folgt $b \sim a$.
- **Transitivität:** Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$.

Eine Äquivalenzrelation teilt die Menge $M$ in disjunkte Äquivalenzklassen auf.

**Aufgabe 4**
Ist "Liebe" eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Menschen? Wie ist es mit "Bekannschaft"?

**Aufgabe 5**
Sind folgende Beziehungen Äquivalenzrelationen?

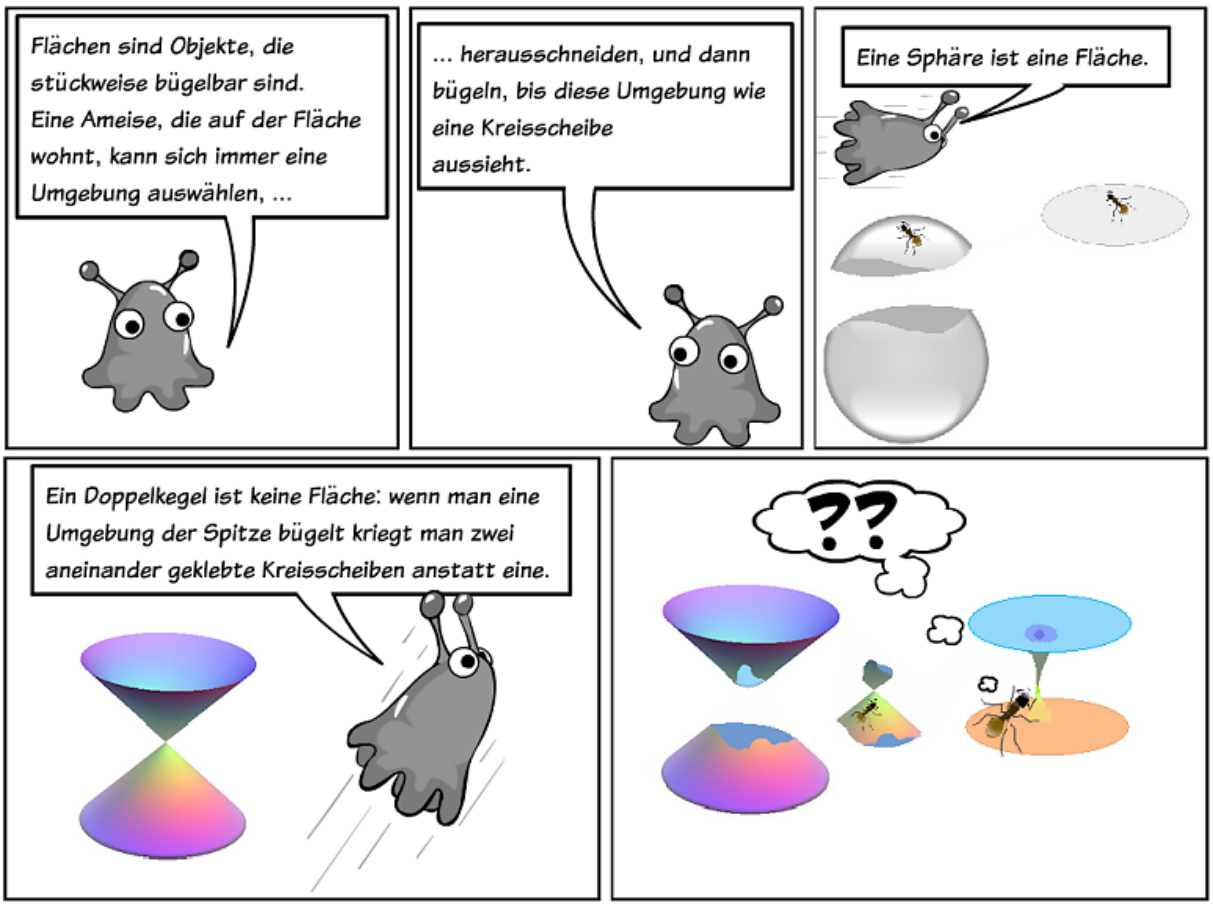
a) Sei $M$ die Menge aller Autos und $a \sim b$ bedeutet, dass die Autos $a$ and $b$ dieselbe Farbe haben.

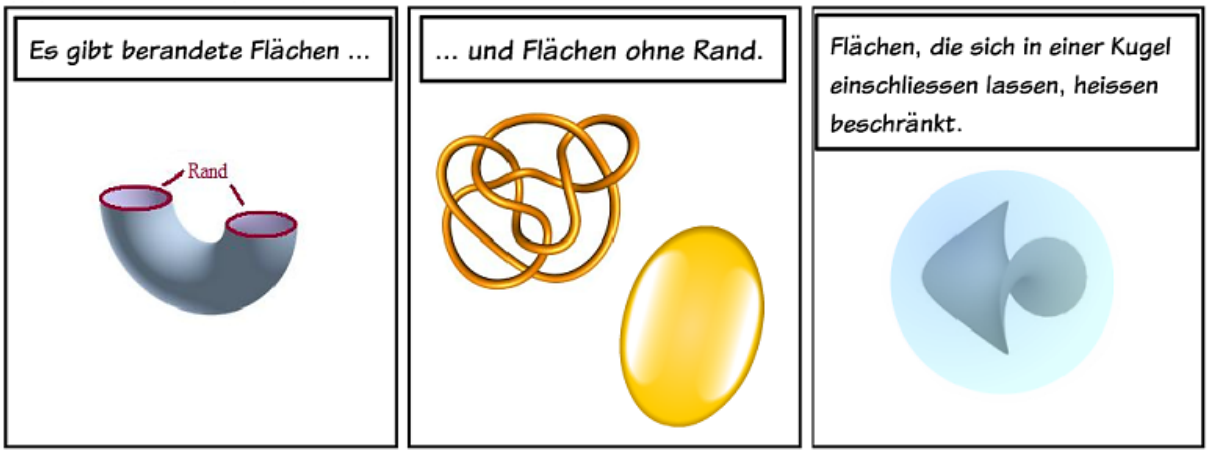
b) $M = \mathbb{R}$ und $a \sim b$ bedeutet $a = b$.

c) $M = \mathbb{R}$ und $a \sim b$ bedeutet $a \leq b$.

d) $M$ ist die Menge der geometrischen Figuren, und die Relation ist Kongruenz.

# Flächen






**Aufgabe 6**
Welche der folgenden Objekte sind Flächen? Welche von denen sind berandet und welche sind beschränkt?

a. Vollkugel

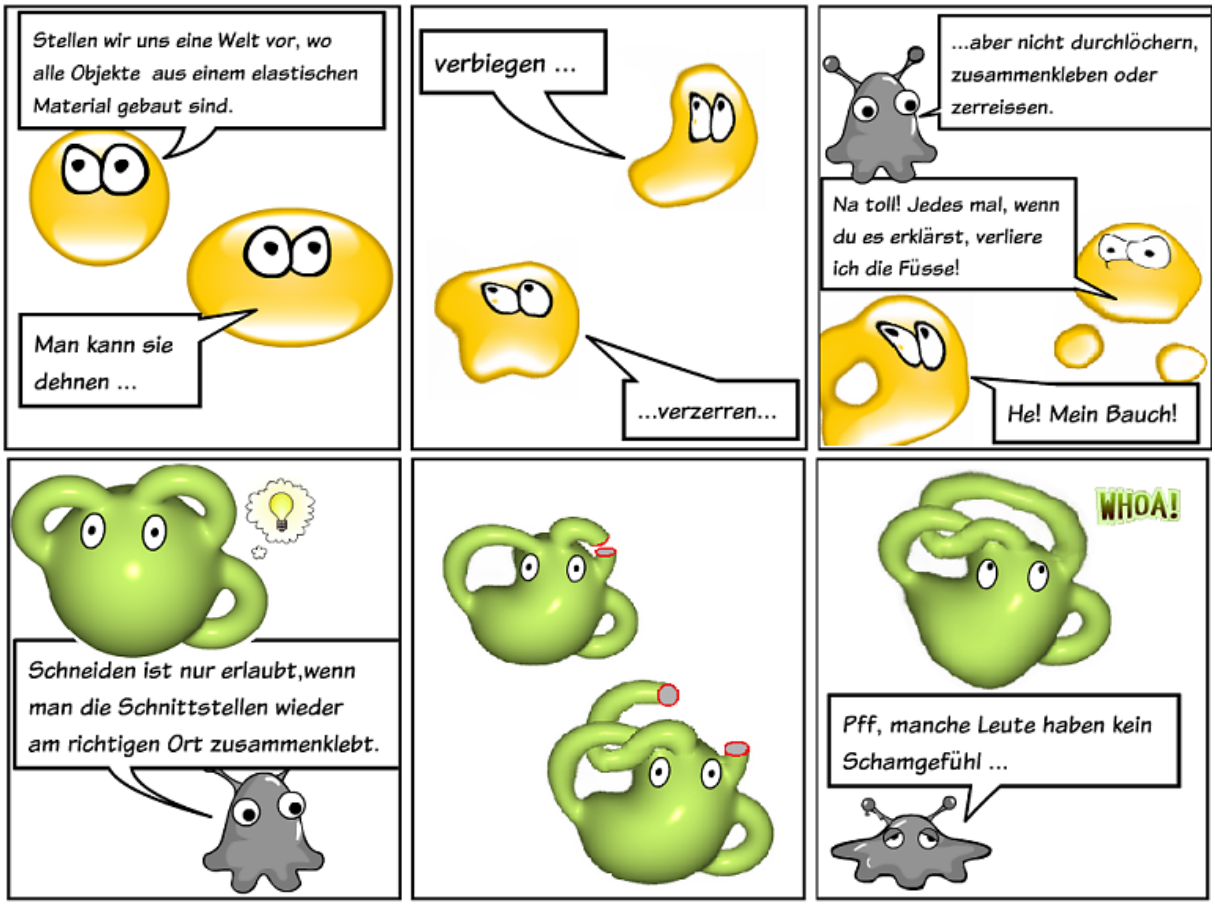
b. Torus (leerer Kringel)

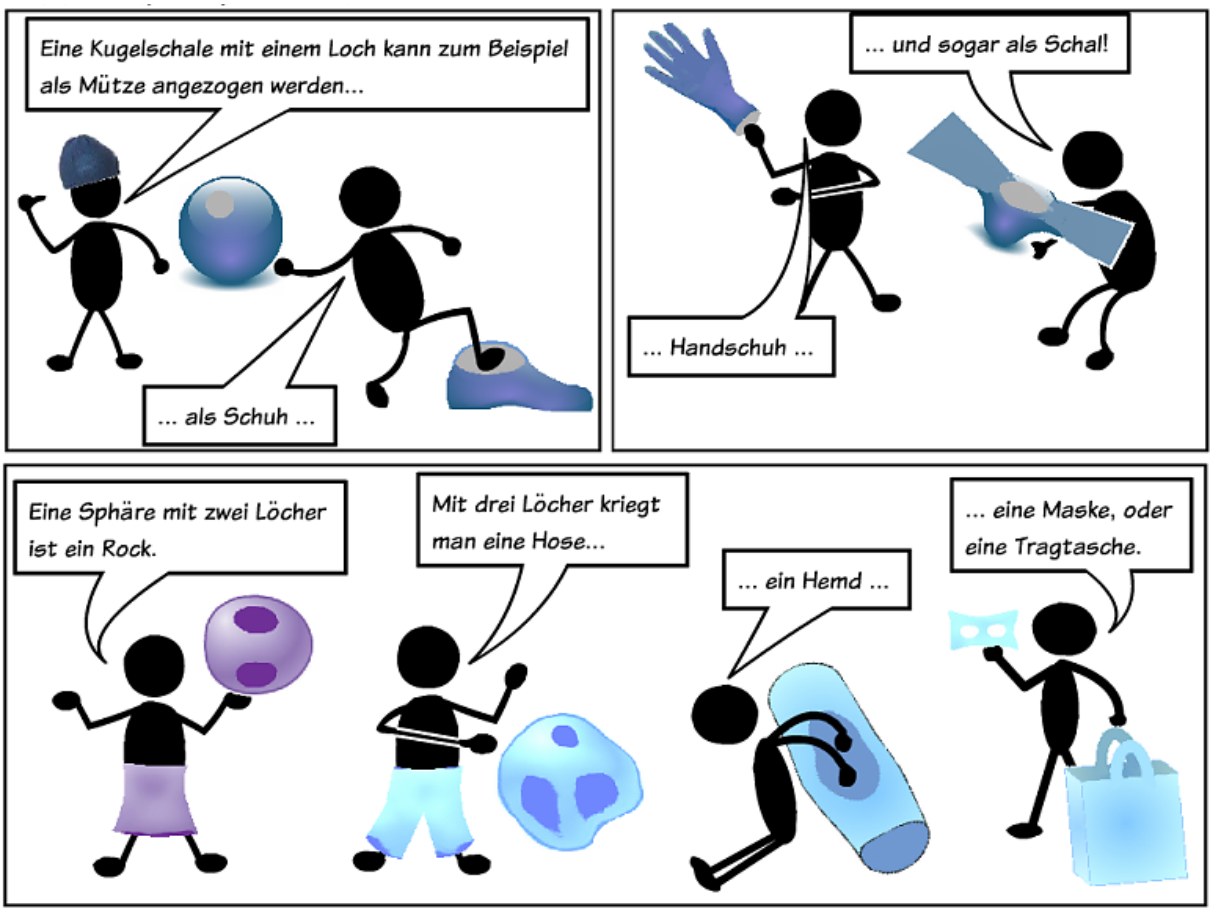
c. Oberfläche eines Würfels

d. Ebene

e. Zylindermantel

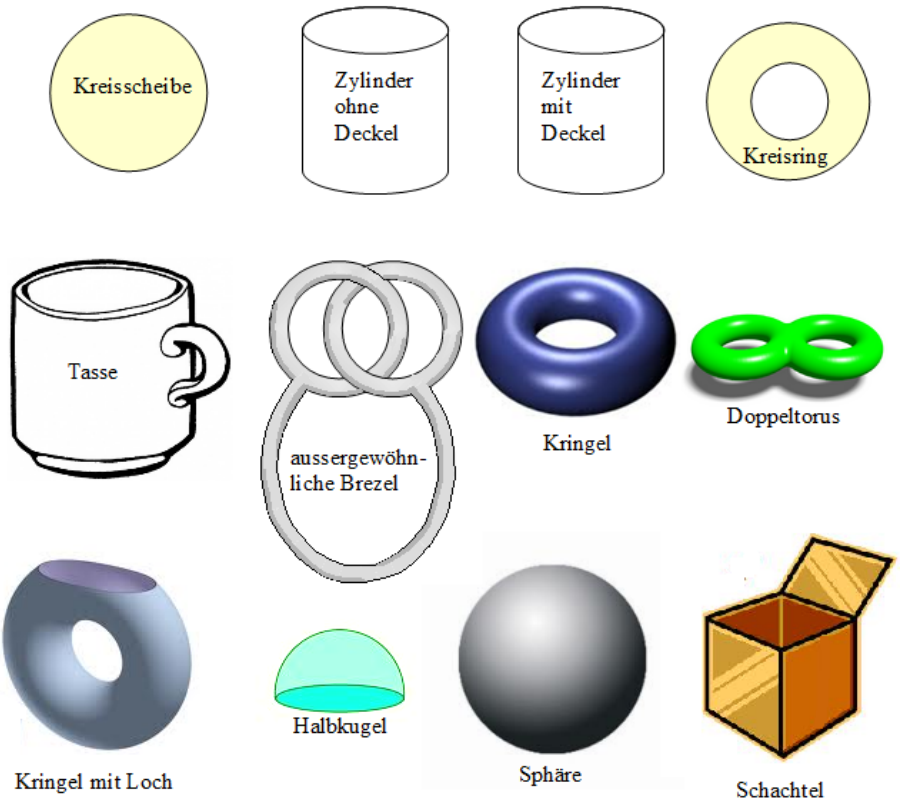
## Topologische Flächen oder elastische Welt



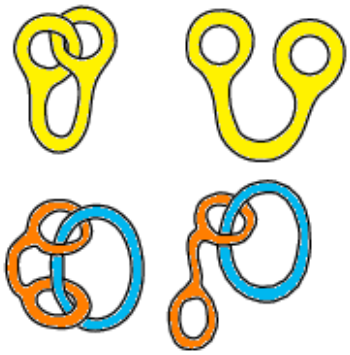



Diese elastische Metamorphose heisst *Homöomorphismus*, d.h. eine stetige Bijektion deren Inverse auch stetig ist. Zwei homömorphe Objekte heissen *topologisch äquivalent*.

**Aufgabe 7**
Welche der folgenden Objekte sind topologisch äquivalent? Welche davon sind berandet? (Für die dreidimensionalen Körper ist nur die Oberfläche zu betrachten)



**Aufgabe 8**
Zeige, dass die folgenden Objekte ineinander umgeformt werden können, ohne die Oberfläche zerschneiden zu müssen.



**Fazit:** Eine *topologische Fläche* ist eine Äquivalenzklasse von Flächen, wobei die Äquivalenzrelation durch einen Homöomorphismus gegeben wird. Eine *topologische Invariante* einer Fläche ist eine Zahl, die sich unter Homöomorphismen nicht ändert (oder die auf der ganzen Äquivalenzklasse den gleichen Wert annimmt). Je mehr Äquivalenzklassen die Invariante trennt, desto stärker ist sie.

**Aufgabe 9**
Gib Beispiele von topologischen Invarianten von Flächen. Wie stark sind die Invarianten?

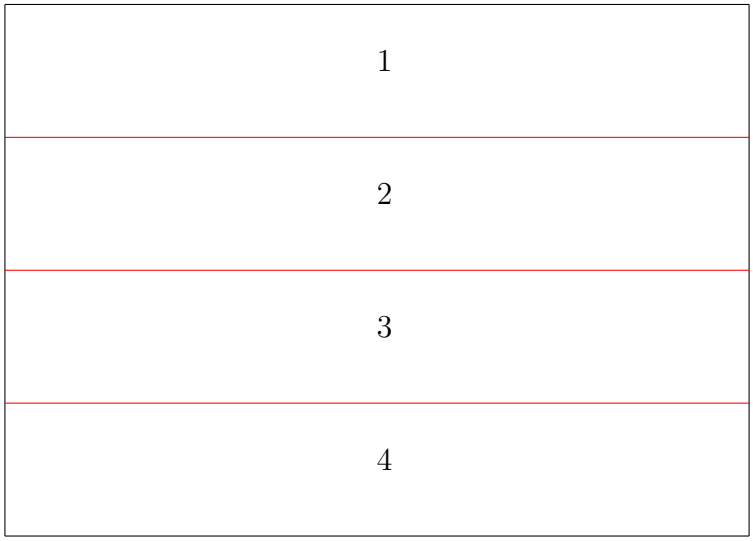
## Das Möbiusband

**Aufgabe 10**
Nimm einen langen Streifen Papier und klebe die Enden verdreht zusammen.

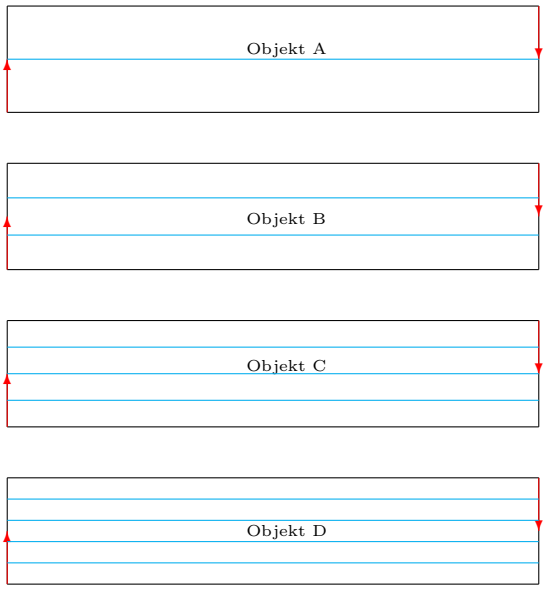
Es handelt sich um einen Möbiusband. Zeichne entlang der Vorderseite eine Linie, die um das ganze Band geht. Kannst du dasselbe für die Rückseite wiederholen?

**Beobachtung:** Eine projektive Ebene ist lokal 2-dimensional, jedoch braucht man einen mindestens 4-dimensionalen Raum, um sie ohne Selbstüberschneidungen einzubetten.

**Aufgabe 11**
Schneide ein A4 Blatt in vier Streifen.




Zeichne jetzt auf jeden Streifen horizontale Linien nach den folgenden vier Mustern.

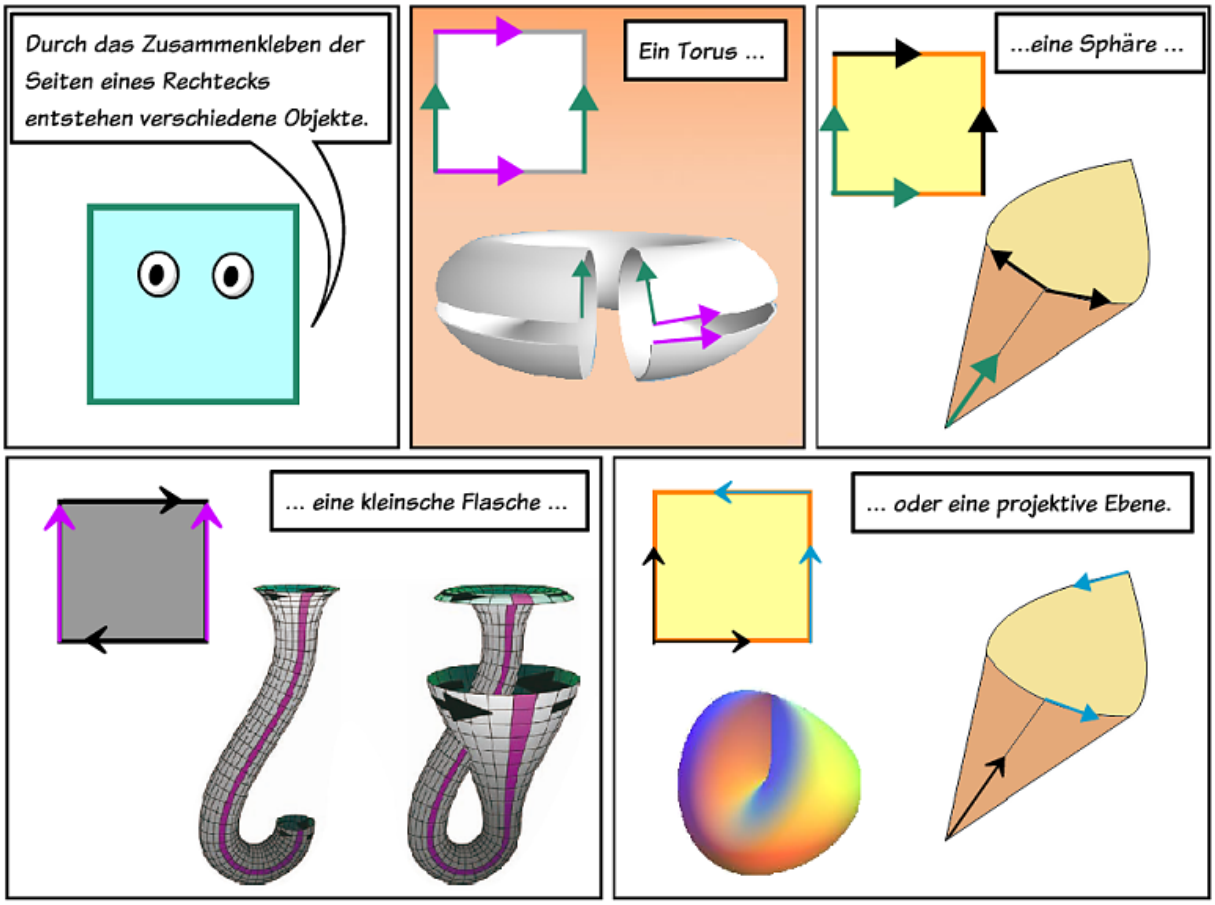



Klebe nun aus jedem Streifen ein Möbiusband.
Versuche, bevor die Möbiusbänder in einem zweiten Schritt entlang der blauen Linien geschnitten werden, folgende Fragen zu beantworten:

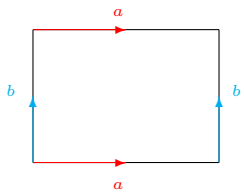
- Wieviele Stücke entstehen?
- Sind die so erhaltenen Flächen orientierbar?

**Aufgabe 12**
Nach dieser Aufgabe, stellt sich spontan die Frage: kann man die vier gebastelten Objekte konsekutiv aus einem einzigen Möbiusband erhalten? (Objekt B aus Objekt A, Objekt C aus Objekt B, ...)

# Exotische Algebra




**Aufgabe 13**
Um diesen Vorgang schneller zu beschreiben, können wir den Seiten, die zusammengeklebt werden müssen, dieselben Namen geben. Für einen Torus haben wir zum Beispiel:




Nun fangen wir bei einer Ecke an und laufen alle Seiten nacheinander im Gegenuhrzeigersinn durch. Für jede Seite schreiben wir einen Buchstaben nach den folgenden Regeln:

- Läuft man auf der Seite mit Name $x$ in Pfeilrichtung, so schreibt man „$x$“.
- Läuft man auf der Seite mit Name $x$ der Pfeilrichtung entgegen, so schreibt man „$x^{-1}$“

Mit diesen Regeln kann man nun Vorschriften aufstellen, nach welchen dann die Objekte geklebt werden sollen.
Beim Torus erhalten wir die Klebevorschrift

$$aba^{-1}b^{-1}.$$

Schreibe für die Sphäre, die Kleinsche Flasche und die projektive Ebene die entsprechenden Klebevorschriften.

**Aufgabe 14**
Umgekehrt können wir aus einer Klebevorschrift ein geometrisches Objekt basteln. Welche Objekte entsprechen folgenden Klebevorschriften?

- $bab^{-1}a^{-1}$
- $abab$
- $baba^{-1}$
- $a^{-1}bb^{-1}a$

**Aufgabe 15**
Wieviele Klebevorschriften kann man mit zwei Symbolen aus $\{a, a^{-1}\}$ und zwei aus $\{b, b^{-1}\}$ schreiben? Wieviele unterschiedliche Objekte kann man mit diesen Klebevorschriften erhalten?

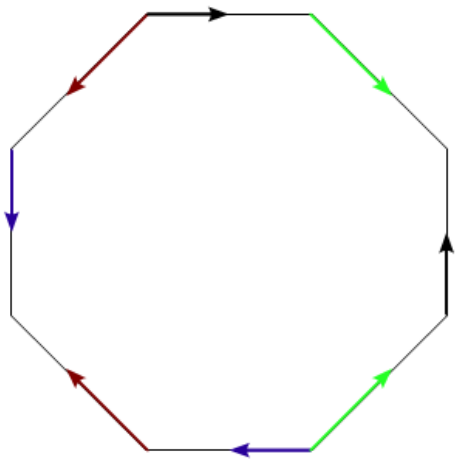
**Aufgabe 16**
Die Wörter $aba^{-1}b^{-1}, b^{-1}aba^{-1}, a^{-1}b^{-1}ab$ und $ba^{-1}b^{-1}a$ entsprechen alle einem Torus. Finde eine geometrische Begründung dafür.

**Aufgabe 17**
In der üblichen Algebra gilt bei einem Produkt das Kommutativgesetzt, so zum Beispiel $abab = aabb$. Ist das Kommutativgesetz auch bei Klebevorschriften gültig?

Bei Klebevorschriften kann man nur benachbarte Buchstaben kürzen und nur, wenn noch mehr als zwei Buchstaben übrig bleiben. Zum Beispiel: $abb^{-1}ca^{-1}dd^{-1}c^{-1} = aca^{-1}c^{-1}$, aber $aba^{-1}b \neq bb$. Begründe diese Aussage.

**Aufgabe 18**
Begründe wieso diese Klebevorschriften sowohl von links nach rechts, als auch von rechts nach links gelesen werden können (zum Beispiel $aba^{-1}b = ba^{-1}ba$, oder $aba^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba$)

**Aufgabe 19**
Mit derselben Methode kann man die Klebevorschrift für ein 8-Eck schreiben. Welche Fläche entspricht dem Wort $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$?

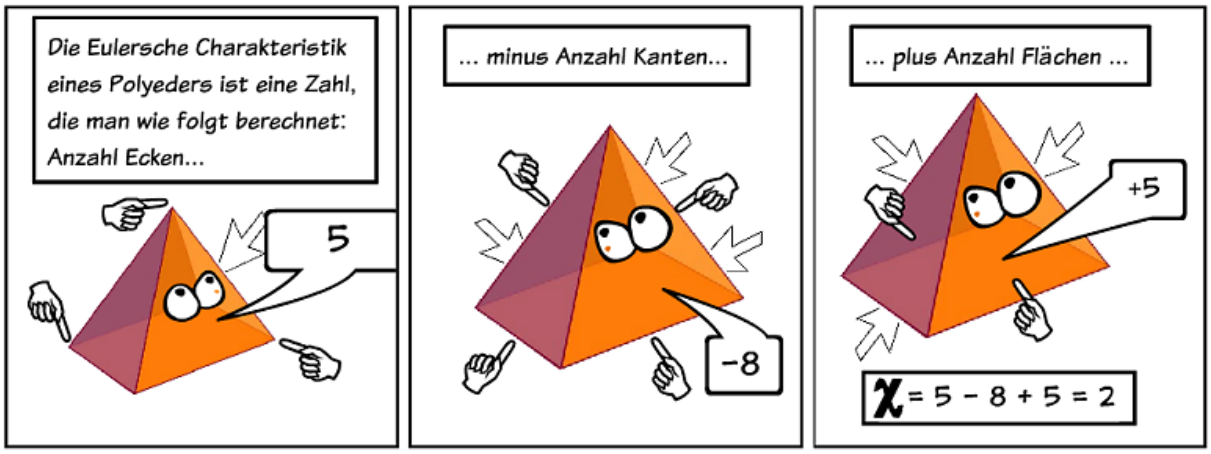


**Aufgabe 20**
Klebevorschriften erlauben auch besser zu erkennen, ob ein Objekt orientierbar ist oder nicht. In der Tat ist ein Objekt orientierbar, es sei denn es enthält ein Möbiusband. Zeichne das Möbiusband bei der Kleinschen Flasche und der projektiven Ebene ein.

**Aufgabe 21**
Welche Flächen entsprechen den folgenden Wörtern?

$$\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \qquad \prod_{i=1}^{g} a_i^2$$

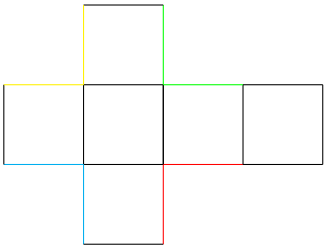
## Eulersche Charakteristik




**Aufgabe 22**
Berechne die Eulersche Charakteristik der platonischen Körper.

**Aufgabe 23**
Wieviel beträgt die Eulersche Charakteristik eines beliebigen $n-$Ecks?

**Aufgabe 24**
Gegeben ist ein Würfelnetz:

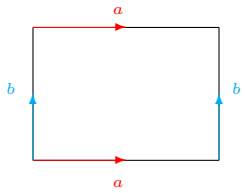


Wie verändert Sich die Eulersche Charakteristik beim Zusammenkleben der gleich gefärbten Strecken?

**Aufgabe 25**
Begründe den Eulerschen Polyedersatz: *Bezeichnet $F$ die Anzahl der Flächen, $K$ die Anzahl der Kanten und $E$ die Anzahl der Ecken eines konvexen Polyeders, so gilt*

$$E - K + F = 2$$

**Aufgabe 26**
Die Eulersche Charakteristik kann auch für Objekte berechnet werden, die keine Polyeder sind. Dazu benutzen wir die Idee der Klebevorschrift. Nehmen wir zum Beispiel die Klebevorschrift eines Torus:




Vor dem Kleben haben wir vier Ecken, vier Kanten und eine Fläche.
Nach dem Kleben bleiben aber nur eine Ecke, zwei Kanten und eine Fläche. Damit erhalten wir die Eulersche Charakteristik eines Torus:

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

Berechne die Eulersche Charakteristik der Sphäre und der Kleinschen Flasche.

**Aufgabe 27**
Berechne die Eulersche Charakteristik eines Doppeltorus.

**Aufgabe 28**
Begründe oder widerlege:

- *„Topologisch äquivalente Objekte besitzen dieselbe Eulersche Charakteristik“*
- *„Zwei Objekte, die dieselbe Eulersche Charakteristik besitzen, sind topologisch äquivalent.*