Geometrie in der Analysis

Prof. Dr. Peter Gallin
Universität Zürich

23. Schweizerischer Tag über
Mathematik und Unterricht
12. September 2012
I: 14:30 – 15.15 Uhr
II: 15:45 – 16:30 Uhr

Peter Gallin
ehem. Gymnasiallehrer
für Mathematik an der KZO
ehem. 50% Fachdidaktiker für Mathematik
an der ETH und an der Universität Zürich
www.gallin.ch
peter@gallin.ch

Ausschreibungstext

Geometrische Veranschaulichungen sind ein wichtiges didaktisches Instrument in der stark numerisch geprägten Analysis. Mehr als nur die einführenden Begriffe wie Steigung und Flächeninhalt bieten sich an. Oft reicht sogar die reine Vorstellungkraft aus, um einen Zusammenhang zu klären, so dass keine Illustrationen und Modelle nötig sind. Vielmehr können die Lernenden anschliessend eigenständig Zeichnungen des Vorgestellten anfertigen. Allerdings kann die Anschauung auch auf Widersprüche führen, welche man nicht vermeiden, sondern auskosten sollte.

Didaktisches: Kernideen

*****

Geometrische Kernideen

*****

Vorstellungsübungen

Mathematikschädigung bei Kindern

- Welche Formel muss ich nehmen?
- Das haben wir aber noch nicht gehabt!
- Müssen wir das an der Prüfung können?
- Ich habe so oder so keine Chance!
- In Mathe war ich immer schlecht.
- Sagen Sie mir einfach, wie man das macht!

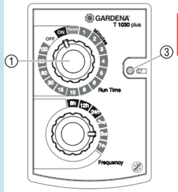
Mathematikschädigung bei Erwachsenen und Profis

- Komm, ich zeig dir, wies geht!
- Mathematik ist rätselhaft
- Betriebsanleitungen sind Algorithmen

Reales Beispiel: Anleitung einer Bewässerungsuhr

Die Anleitung

Batterie testen:

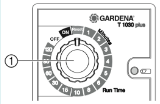


Die Batterie sollte vor längerer Abwesenheit (z.B. Urlaub) getestet werden. Damit das ausfließende Wasser keinen Schaden anrichten kann, ist für eine gezielte Ableitung an der Bewässerungsuhr zu sorgen (Schlauch anschließen, Eimer unterstellen, etc.).

1. Wasserhahn öffnen.
2. **Run-Time**-Drehknopf ① im Uhrzeigersinn auf **ON** drehen.
   Das Ventil öffnet.
3. **Run-Time**-Drehknopf ① auf **OFF** drehen.
   Das Ventil schließt.

Batterie ausreichend voll	**Batterie fast leer**	**Batterie leer**
Ventil öffnet.	Ventil öffnet.	Ventil öffnet nicht.
Batteriezustands-LED ③ blinkt nicht.	Batteriezustands-LED ③ blinkt 5 Mal.	Batteriezustands-LED ③ blinkt ständig.
Funktion der Bewässerungsuhr noch für min. 4 Wochen gewährleistet.	Funktion der Bewässerungsuhr noch max. 4 Wochen.	Bewässerungsuhr ohne Funktion.
	Batteriewechsel empfohlen.	Batteriewechsel erforderlich.

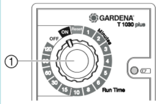
Bewässerungs-Startzeit ändern:



Die Bewässerungs-Startzeit wird neu festgelegt.

1. **Run Time**-Drehknopf ① gegen den Uhrzeigersinn auf **Reset** drehen.
   Nach 2 Sekunden wird die jetzige Uhrzeit als neue Bewässerungs-Startzeit übernommen.
2. **Run Time**-Drehknopf ① wieder zurück auf die gewünschte Bewässerungs-Dauer drehen.

Manuell bewässern (ON):



Das Ventil kann jederzeit manuell geöffnet oder geschlossen werden. Die Bewässerungs-Startzeit und Bewässerungs-Häufigkeit bleiben dabei erhalten.

→ **Run Time**-Drehknopf ① **im Uhrzeigersinn** auf **ON** drehen.
Das Ventil öffnet für 30 Minuten, unabhängig des eingestellten Programms.

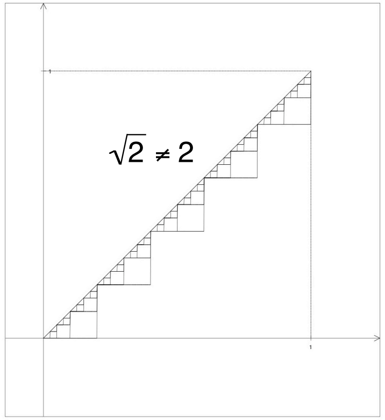
Um das eingestellte Programm wieder zu aktivieren, muss die zuvor eingestellte Bewässerungs-Dauer wieder eingestellt werden.

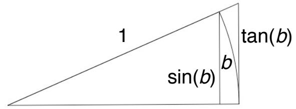
Fehlende Kernidee
Zwischen „Reset“ und „ON“ hat es eine mechanische Barriere, über die der Drehknopf nicht bewegt werden kann.

Pädagogische Konsequenz

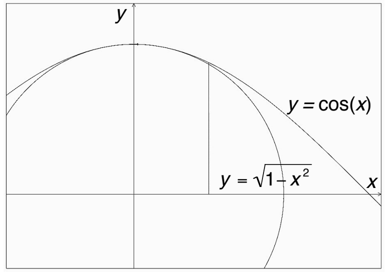
Der Mensch wird durch (idiotensichere) Algorithmen entmündigt und aufs Auswendiglernen degradiert. Eine Kernidee versetzt ihn dagegen in die Lage, selbstständig Folgerungen für sein Handeln zu ziehen.

Das heuristische Prinzip der Parallelanschmiegung



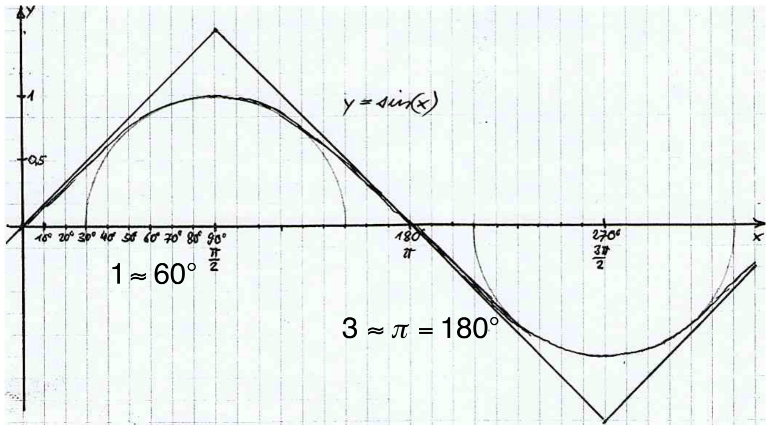


$$\sin(b) \approx b \approx \tan(b)$$



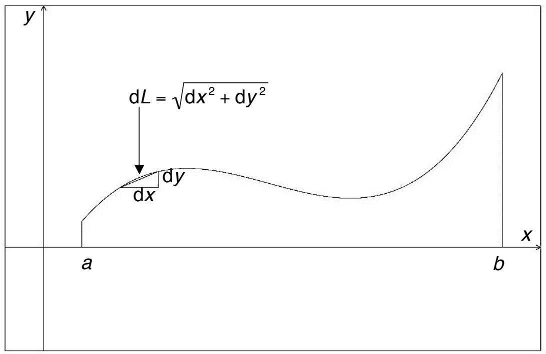
$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \approx \sqrt{1-x^2}$$

Handzeichnung einer Sinuskurve



Regel: 6 Häuschen als Einheit
(Kernidee für das Bogenmass)
1 = 57.3...°

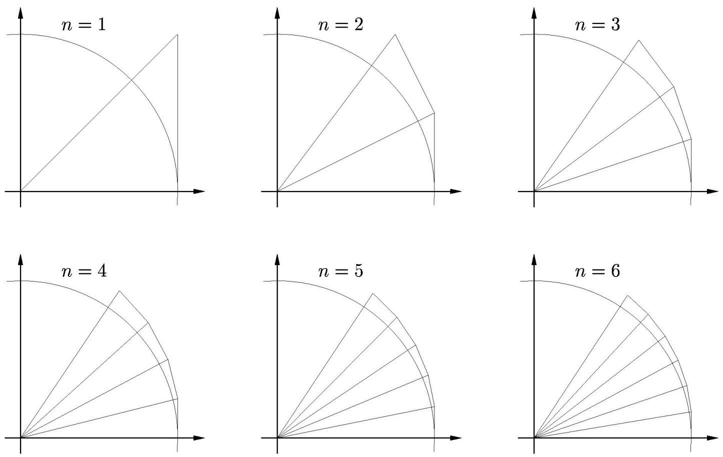
Konsequenz der Parallelanschmiegung: Kurvenlänge



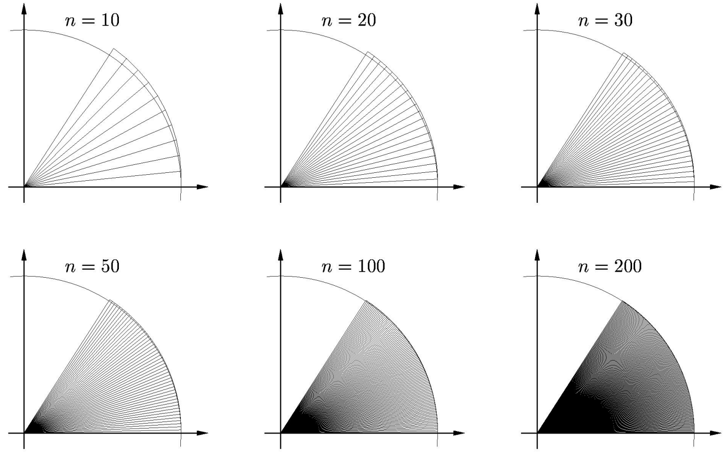
$$L = \int dL$$
$$= \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Aus: Bulletin des VSMP, Nr. 90, Oktober 1992

Geometrische „Genese“ der Folgeglieder $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ in der Gausschen Zahlenebene



Aus: Bulletin des VSMP, Nr. 90, Oktober 1992



Parallelanschmiegung beim unendlichen Zimmer auf der perfekten Erdkugel

Ziel: Berechnung der Kugeloberfläche aus dem bekannten Kugelvolumen

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

O = Grundfläche des Zimmers ≈ Volumen durch Zimmerhöhe h

$$O \approx \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}{h} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(3R^2 + 3Rh + h^2\right) \underset{h \text{ sehr klein}}{\approx} 4\pi R^2$$

Satz

Für jeden Körper, der eine Inkugel besitzt, gilt:

Die Ableitung seines Volumens nach dem Inkugelradius ergibt dessen Oberfläche

Aufgabe

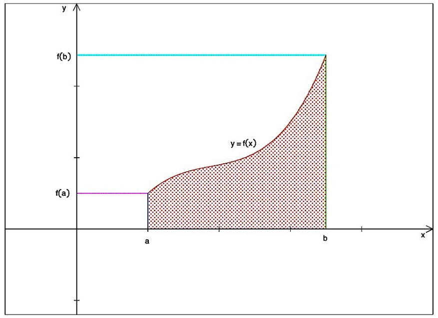
Zeige, dass dieser Satz gilt für
alle platonischen Körper,
für jeden Drehkegel,
für einen Drehkegelstumpf mit Inkugel

Rotation eines Flächenstücks unter einem Funktionsgraphen um die *x*-Achse

Rotation um die x-Achse	Volumen V endlich	Volumen V unendlich
Fläche F endlich	$F=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx\ ,\ V=\pi\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx$	$F=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx\ ,\ V=\pi\int_0^1 \frac{1}{x}dx$
Fläche F unendlich	$\boxed{F=\int_1^\infty \frac{1}{x}dx\ ,\ V=\pi\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx}$	$F=\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx\ ,\ V=\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$

Paradox

Rotation eines Flächenstücks unter einem Funktionsgraphen um die *y*-Achse



http://www.preisroboter.de/n/50+holz+lochs%C3%A4ge+mm+index%3Aall.html

Lochbohrer als Kernidee für eine wenig bekannte Volumen-Integralformel

$$V=\int_a^b 2\pi x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

Eine geometrische Bedeutung der partiellen Integration

(Funktion monoton steigend zwischen a und b)

Vorstellungsübung

$$V_1=2\pi\int_a^b \overset{\uparrow}{x}\cdot f(\overset{\downarrow}{x})\,\mathrm{d}x=2\pi\left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_a^b-2\pi\int_a^b\frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x$$

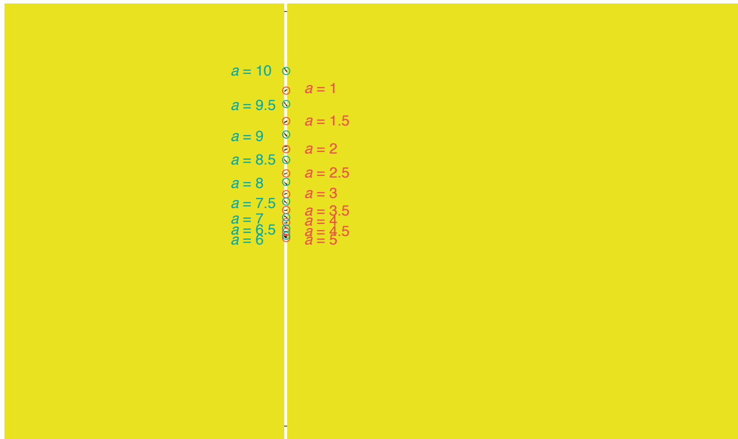
$$=\pi\left[x^2f(x)\right]_a^b-\pi\int_a^b x^2f'(x)\mathrm{d}x=\pi b^2f(b)-\pi a^2f(a)-\pi\int_{f(a)}^{f(b)}x(y)^2\mathrm{d}y$$

$$=V_{\mathrm{Zylinder_b}}-V_{\mathrm{Zylinder_a}}-V_2$$

Weitere Vorstellungübung

Kurvenschar: $f(x)=\frac{1}{5}\left(\left(a-\sqrt{x}\right)^2-a^{1.2}-\sqrt{x}\right)$

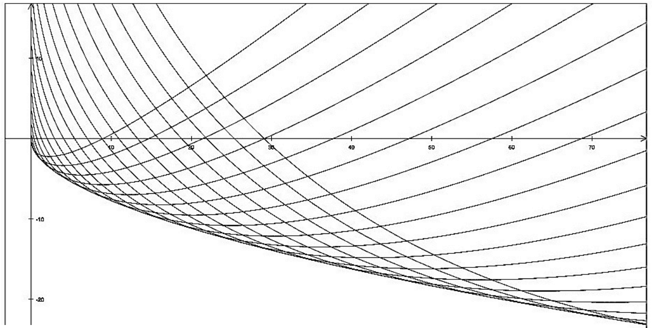
Gesucht ist die Hüllkurve



Weitere Vorstellungübung

Kurvenschar: $f(x) = \frac{1}{5}\left(\left(a - \sqrt{x}\right)^2 - a^{1.2} - \sqrt{x}\right)$

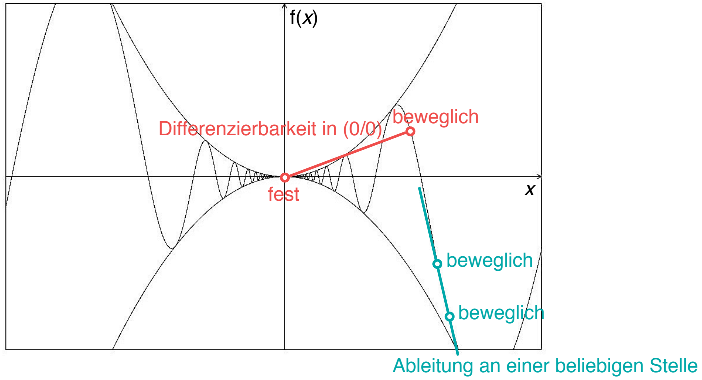
Gesucht ist die Hüllkurve



Aufgabe: Leite die Schargleichung nach *a* ab, setze die Ableitung Null und bestimme daraus die Parameterdarstellung der Hüllkurve.

Was bedeutet es geometrisch, wenn eine Funktion differenzierbar ist, die Ableitung dagegen nicht existiert?

Paradebeispiel: $f(x) = 5 \cdot x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Der Dimensionsbetrug der Differenzialrechnung

Vorstellungsübung

Dimensionsbetrug

Ableiten heisst, eine Dimension dazuschmuggeln

Integrieren heisst, eine Dimension vernichten