

# Tight Spans – spannende metrische Räume

Urs Lang  
ETH Zürich

12. September 2012  
Tag Mathematik und Unterricht

# Modellproblem: Rekonstruktion phylogenetischer Bäume



# Modellproblem: Rekonstruktion phylogenetischer Bäume

123 311 023 302

133 312 113 312

122 312 023 302

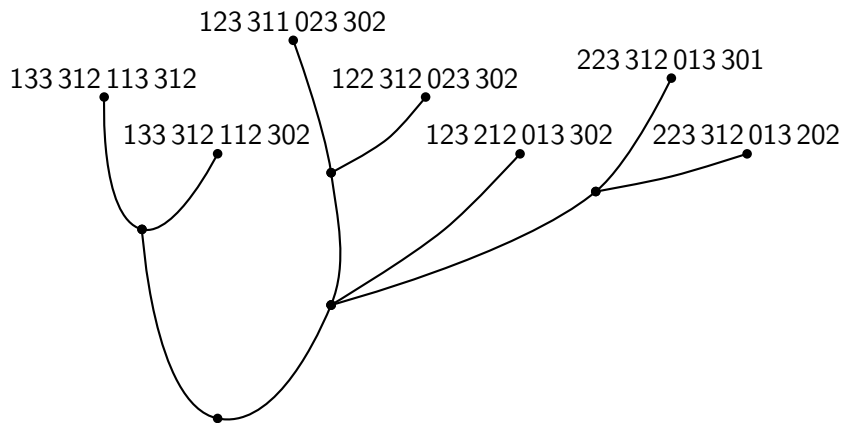
223 312 013 301

133 312 112 302

123 212 013 302

223 312 013 202

# Modellproblem: Rekonstruktion phylogenetischer Bäume



Definiere  $d((a_i), (b_i)) := |\{i : a_i \neq b_i\}|$

# Abstraktion

Lässt sich jeder (endliche?) metrische Raum  $(X, d)$  isometrisch in einen kleinsten „baumartigen“ metrischen Raum  $(\bar{X}, \bar{d})$  einbetten?

$d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  erfüllt

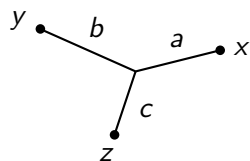
- (i)  $d(x, y) = 0$  genau dann wenn  $x = y$ ,
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  und
- (iii)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (Dreiecksungleichung).

Mögliche Forderungen an den Zielraum  $(\bar{X}, \bar{d})$ :

- $\bar{X}$  ist **geodätisch**, d.h. für jedes Paar von Punkten  $\bar{x}, \bar{y}$  in  $\bar{X}$  existiert ein geodätisches Segment  $[\bar{x}, \bar{y}]$  – eine isometrische Kopie des Intervalls  $[0, \bar{d}(\bar{x}, \bar{y})]$ .
- $\bar{X}$  ist **kontrahierbar**, d.h. auf einen Punkt zusammenziehbar.

## Zwei einfache Beispiele

**Bsp. 1**  $X = \{x, y, z\}$ , Einbettung in Dreiein  $\bar{X}$ :



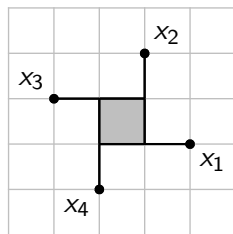
$$a + b = d(x, y), \quad b + c = d(y, z), \quad a + c = d(x, z)$$

$$a = [d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)]/2$$

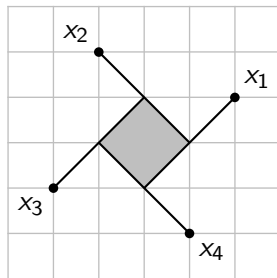
$$b = [d(y, z) + d(x, y) - d(x, z)]/2$$

$$c = [d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)]/2$$

**Bsp. 2**  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $d(x_1, x_3) = d(x_2, x_4) = 4$ , sonst  $d(x_i, x_k) = 3$  ( $i \neq k$ ).

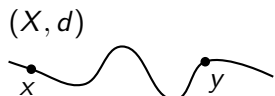


$$\|x - y\|_1 = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|$$

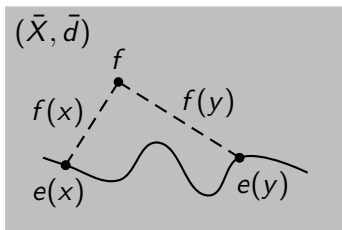


$$\|x - y\|_\infty = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$$

# Die Konstruktion von J. R. Isbell (Comment. Math. Helv. 1964)



$\xrightarrow{e}$   
isometrische  
Einbettung



- $\Delta(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) + f(y) \geq d(x, y)\}$
- $\bar{X} := E(X) := \left\{ \begin{array}{l} \text{minimale Elemente von } (\Delta(X), \leq) \\ = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sup_{y \in X} (d(x, y) - f(y))\} \end{array} \right\}$
- $\bar{d}(f, g) := \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| (< \infty)$
- $e(x) := d_x, d_x(y) := d(x, y)$

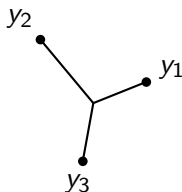
## $E(X)$ ist eine injektive Hülle von $X$

Ein metrischer Raum  $Y$  heisst **injektiv**, falls für jeden metrischen Raum  $B$  und jede 1-Lipschitz-Abb.  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subset B$ , eine 1-Lipschitz-Erweiterung  $\bar{f}: B \rightarrow Y$  existiert (d.h.  $\bar{f}|_A = f$ ).

**Bsp.**  $\mathbb{R}$ , vollständige metrische Bäume,  $\ell_\infty(I)$

Ist  $Y$  injektiv, so gilt:

- $Y$  ist vollständig, geodätisch und kontrahierbar,
- jedes Tripel von Punkten  $y_1, y_2, y_3 \in Y$  spannt ein geodätisches Dreieck in  $Y$  auf,
- abgeschlossene Bälle in  $Y$  sind injektiv.



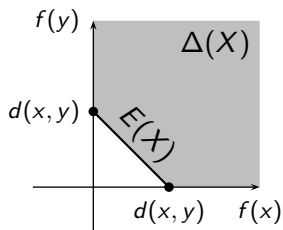
**Satz (Isbell)**  $E(X)$  ist injektiv. Jede isometrische Einbettung  $X \rightarrow Z$  in einen injektiven metrischen Raum lässt sich faktorisieren als  $X \xrightarrow{e} E(X) \rightarrow Z$  für eine isometrische Einbettung  $E(X) \rightarrow Z$ .



# Weitere Eigenschaften von $X \mapsto E(X)$

- Ist  $X$  beschränkt, so ist  $0 \leq f \leq \text{diam}(X)$  für alle  $f \in E(X)$ , somit  $\text{diam}(E(X)) = \text{diam}(X)$ .
- Ist  $X$  kompakt, so ist  $E(X)$  kompakt.
- Ist  $X$  endlich, so ist  $\Delta(X)$  eine unbeschränkte polyedrische Menge in  $\mathbb{R}^{|X|}$  ( $\cong \{f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ ), und  $E(X)$  ist der aus allen beschränkten Seiten bestehende Teilkomplex von  $\partial\Delta(X)$ .

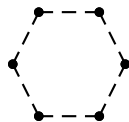
**Bsp.**  $X = \{x, y\}$



Jede  $n$ -Zelle von  $E(X)$  ist isometrisch zu einem Polytop in  $\ell_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . Es gilt

$$\dim(E(X)) \leq \frac{1}{2}|X|,$$


mit Gleichheit z.B. für  $X = (\mathbb{Z}/(2k\mathbb{Z}), |\cdot| \bmod 2k)$ .




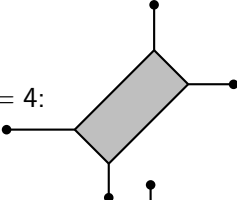
# Galerie

A. Dress 1984: Wiederentdeckung von  $E(X)$  (tight span  $T_X$ )

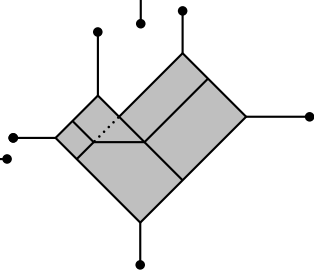
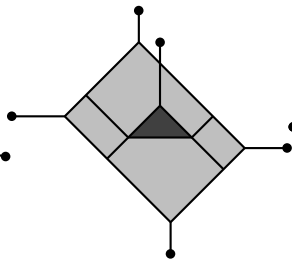
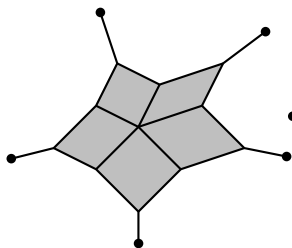
Anwendungen: phylogenetische Analysis, minimale Netzwerke, geometrische Gruppentheorie

$|X| = 2$ : 

$|X| = 3$ : 

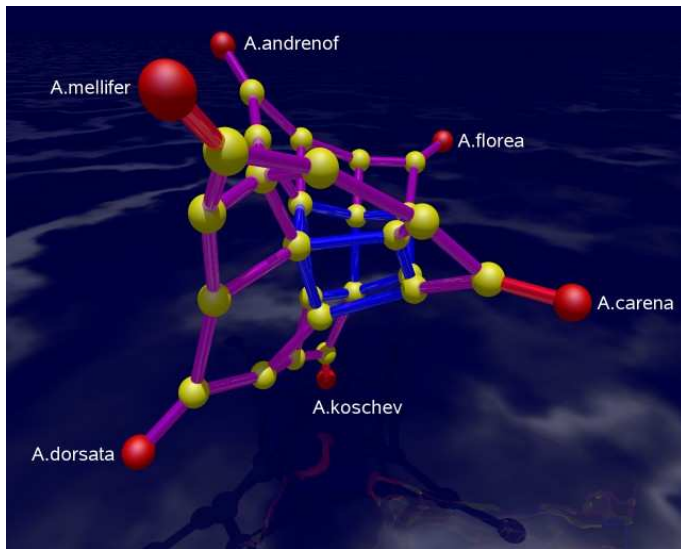
$|X| = 4$ : 

$|X| = 5$ : 3 kombinatorische Typen



$|X| = 6$ : 339 kombinatorische Typen (Sturmfels–Yu 2004)

# Ein reales phylogenetisches Beispiel



<http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~joswig/tightspans/index.html>

# Minimale Netzwerke

$X = (X, d)$  endlicher metrischer Raum

Eine **Realisierung** von  $X$  ist ein endlicher, zusammenhängender, gewichteter metrischer Graph (Wegmetrik  $\rightsquigarrow$  geodätischer Raum), dessen Eckenmenge eine isometrische Kopie von  $X$  enthält.

Eine **optimale Realisierung** von  $X$  ist eine Realisierung minimaler Gesamtlänge. Jeder endliche metrische Raum besitzt eine optimale Realisierung.

Für  $|X| = 3$  ist das Dreieck  $E(X)$  eine optimale Realisierung.

Für  $|X| = 4$  ist das 1-Skelett von  $E(X)$  eine optimale Realisierung.

**Satz (Dress)** Ist  $\Gamma$  eine optimale Realisierung von  $X$ , so existiert eine 1-Lipschitz-Abbildung  $\phi: \Gamma \rightarrow E(X)$  mit  $\phi(x) = e(x) = d_x$  für alle  $x \in X \subset \Gamma$ , die jede Kante von  $\Gamma$  isometrisch abbildet.

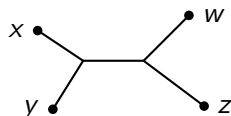
Vermutung (Dress): Jede solche Abbildung  $\phi$  ist injektiv.

# Bäume

$X = (X, d)$  ist ein (**metrischer**) **Baum**, falls  $X$  geodätisch ist und jedes geodätische Dreieck in  $X$  isometrisch zu einem Dreieck ist.

Dann gilt für  $w, x, y, z \in X$ : Von den drei Größen  $d(w, x) + d(y, z)$ ,  $d(w, y) + d(x, z)$ ,  $d(x, y) + d(w, z)$  stimmen zwei überein, und die dritte ist kleiner oder gleich diesem Wert.

Somit gilt für alle Quadrupel  $(w, x, y, z)$  in  $X$ :



$$d(w, x) + d(y, z) \leq \max\{d(w, y) + d(x, z), d(x, y) + d(w, z)\}.$$

Umgekehrt gilt: Jeder geodätische metrische Raum  $X$ , der diese Bedingung erfüllt, ist ein Baum.

**Satz (Dress 1984)** Erfüllt der metrische Raum  $X$  diese Quadrupel-Bedingung, so ist  $E(X)$  ein metrischer Baum.

**Beweis** (für  $|X| < \infty$ ): Seien  $e, f, g, h \in E(X)$ . Da  $e, f$  minimale Elemente von  $\Delta(X)$  sind, gibt es  $w, x \in X$ , so dass entweder

- $\|e - f\|_\infty = e(x) - f(x)$  und  $e(x) + e(w) = d(w, x)$  oder
- $\|e - f\|_\infty = f(w) - e(w)$  und  $f(w) + f(x) = d(w, x)$ .

In beiden Fällen folgt  $\|e - f\|_\infty = d(w, x) - e(w) - f(x)$ . Analog gibt es  $y, z \in X$ , so dass  $\|g - h\|_\infty = d(y, z) - g(y) - h(z)$ .

Setze  $S := e(w) + f(x) + g(y) + h(z)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\|e - f\|_\infty + \|g - h\|_\infty &= d(w, x) + d(y, z) - S \\ &\leq \max\{d(w, y) + d(x, z), d(x, y) + d(w, z)\} - S.\end{aligned}$$

Es gilt  $d(w, y) \leq e(w) + e(y)$  und  $d(x, z) \leq f(x) + f(z)$ , somit

$$\begin{aligned}d(w, y) + d(x, z) - S &\leq e(y) + f(z) - g(y) - h(z) \\ &\leq \|e - g\|_\infty + \|f - h\|_\infty.\end{aligned}$$

Analog folgt  $d(x, y) + d(w, z) - S \leq \|f - g\|_\infty + \|e - h\|_\infty$ .  $\square$

# $\delta$ -hyperbolische Räume

$X$  heisst  $\delta$ -hyperbolisch ( $\delta \geq 0$ ), falls für alle Quadrupel  $w, x, y, z \in X$  gilt:

$$d(w, x) + d(y, z) \leq \max\{d(w, y) + d(x, z), d(x, y) + d(w, z)\} + \delta.$$

(M. Gromov 1987)

$X$  ist **diskret geodätisch**, falls  $d$  ganzzahlig ist und für jedes Paar von Punkten  $x, y \in X$  eine isometrische Einbettung  $\gamma: \{0, 1, \dots, d(x, y)\} \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(d(x, y)) = y$  existiert.

**Satz ( $\sim$ Dress)** Sei  $X$  ein  $\delta$ -hyperbolischer metrischer Raum. Dann ist  $E(X)$  auch  $\delta$ -hyperbolisch. Ist  $X$  zusätzlich geodätisch bzw. diskret geodätisch, so liegt  $E(X)$  im Abstand höchstens  $\delta$  bzw.  $\delta + \frac{1}{2}$  vom Bild der Einbettung  $e: X \rightarrow E(X)$ .

# Hyperbolische Gruppen

$G$  Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem  $S$

Für  $x \in G$  sei  $|x|_S := \min\{n \geq 0 : x = a_1 \dots a_n, a_i \in S \cup S^{-1}\}$  die minimale Wortlänge von  $x$  im Alphabet  $S \cup S^{-1}$ .

$d_S(x, y) := |x^{-1}y|_S$  definiert eine links-invariante Metrik auf  $G$ .

$G$  heisst **hyperbolisch**, falls  $(G, d_S)$   $\delta$ -hyperbolisch ist für ein geeignetes  $\delta \geq 0$  (Gromov 1987).

**Satz (L. 2011)** Ist  $X$  ein  $\delta$ -hyperbolischer, diskret geodätischer metrischer Raum, so ist  $E(X)$  ein lokal-endlicher polyedrischer Komplex mit endlich vielen Isometrietypen von Zellen.

Ist  $G$  eine hyperbolische Gruppe, so operiert  $G$  eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch zelluläre Isometrien auf dem Komplex  $E(G)$ .



**Danke**

für Ihre Aufmerksamkeit!