Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

SCIENCE MEETS SCHOOL
EDUCETH.CH

DAS MINT-LERNZENTRUM AN DER ETH ZÜRICH

Wirkt auch, wenn man nicht daran glaubt!

- Selbsterklärungsaufgaben im Mathematikunterricht

Armin P. Barth

Vortrag am 22. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht

Mittwoch, 14. September 2011, Gymnasium Kirchfeld, Bern

FRANK & ERNEST® by Bob Thaves

1. Beipackzettel: Das MINT-Lernzentrum an der ETH Zürich
2. Arzneien: Mathematische Produkte des MINT-Lernzentrums:
3. Selbstheilende Kräfte: Was die Forschung über Selbsterklärungen weiss
4. Rezepte: Beispiele von Selbsterklärungsaufgaben
5. Nebenwirkungen: Diskussion

1. Beipackzettel: Das MINT-Lernzentrum an der ETH Zürich

(…)

2. Arzneien: Mathematische Produkte des MINT-Lernzentrums

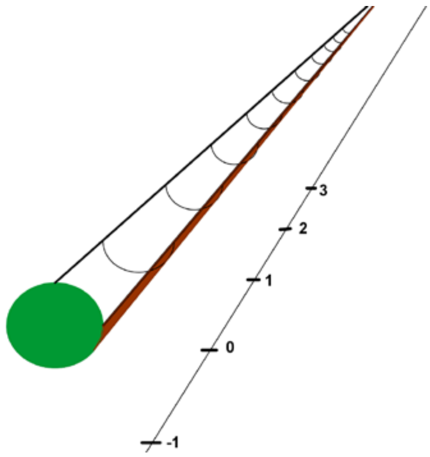
- **Differentialrechnung I** (Unterrichtseinheit, 130 Seiten)
- Praetest zur Unterrichtseinheit Differentialrechnung I
- Posttest zur Unterrichtseinheit Differentialrechnung I
- In Arbeit: **Precalculus: Funktionen** (Unterrichtseinheit)
- In Arbeit: **Precalculus: Folgen, Reihen und Grenzwerte** (Unterrichtseinheit)

Auszüge auf den Seiten 2 – 5

<u>Aus dem Praetest</u>

(I) Fragen zum Grundverständnis des Grenzwertbegriffs

Wir betrachten eine unendlich lange Rinne, in der zu Beginn immer eine Kugel an der Position 0 ruht. An der linearen Skala lassen sich alle reellen Zahlen ablesen. Wenn wir von der Position der Kugel reden, so stellen wir uns die Kugel immer punktförmig vor oder meinen die Position des Kugelmittelpunktes. Die Kugel kann vorwärts (in Richtung grösser werdender Skalenwerte) oder rückwärts angestossen werden. Aufgrund von Reibung kommt die Kugel nach jedem Anstoss nach einer gewissen Strecke zum Halt.



1) Anna stösst die Kugel immer wieder an, und jedes Mal rollt diese genau einen Meter weiter vorwärts. Was trifft zu?

   A) Die Kugel erreicht irgendwann jede beliebig hohe Skalenposition.
   B) Nach dem n-ten Anstossen kommt sie an der Position $n+1$ Meter zum Halt.
   C) Nach dem n-ten Anstossen kommt sie an der Position n Meter zum Halt.
   D) Die Kugel wird eine bestimmte Skalenposition niemals überschreiten können.

2) Andreas stösst die Kugel immer wieder an. Nach dem ersten Anstoss rollt sie 10 Meter weit vorwärts. Da Andreas ermüdet, befördert jeder neue Stoss die Kugel immer nur genau halb so weit vorwärts wie der letzte. Was trifft zu?

A) Die Kugel erreicht irgendwann jede beliebig hohe Skalenposition.
B) Nach dem *n*-ten Anstossen kommt die Kugel an der Position $n \cdot 0.5$ zum Halt.
C) Die Kugel wird die Position 20 nie überschreiten.
D) Die Kugel wird die Position 20 nach endlich vielen Anstössen erreichen.

3) Herbert stösst die Kugel abwechselnd vorwärts und rückwärts an, und jedes Mal rollt diese genau einen Meter weit. Was trifft zu?

A) Die Folge der Positionen der Kugel hat einen Grenzwert und zwar -1.
B) Die Folge der Positionen der Kugel hat einen Grenzwert und zwar 0.
C) Die Folge der Positionen der Kugel hat einen Grenzwert und zwar 1.
D) Die Folge der Positionen der Kugel hat keinen Grenzwert.

(…)

(II) Fragen zum technischen Umgang mit Grenzwerten
(III) Fragen zu Funktionen
(IV) Fragen zu Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung
(V) Diverses

Aus dem Posttest:

4)
Es sei $C(t)$ die Konzentration (im Mol pro Liter) eines Medikamentes im Blut, *t* Minuten nach Verabreichung. Betrachten Sie die Terme

(1) $\frac{dC}{dt}$ (2) $\frac{C(20+\Delta t)-C(20)}{\Delta t}$ (3) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{C(20+\Delta t)-C(20)}{\Delta t}$ (4) $C'(20)$

A) (1) und (4) sind identisch.
B) (2) und (4) sind identisch.
C) (1) und (3) sind identisch.
D) (3) und (4) sind identisch.

5)
Der Graph einer Funktion f schneidet die x-Achse streng monoton wachsend im Punkt (5 , 0). Unter welchem Winkel zur Horizontalen schneidet der Graph die x-Achse?

A) $\arctan(f'(5))$
B) $f'(5)$
C) $\tan(f'(5))$
D) Da sich der Graph krümmt, gibt es keinen solchen Winkel.

11)
Von $f(x) = x^2 - x$ soll die erste Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten berechnet werden. Unten finden Sie mögliche erste Schritte dieser Berechnung. Welche Varianten sind korrekt?

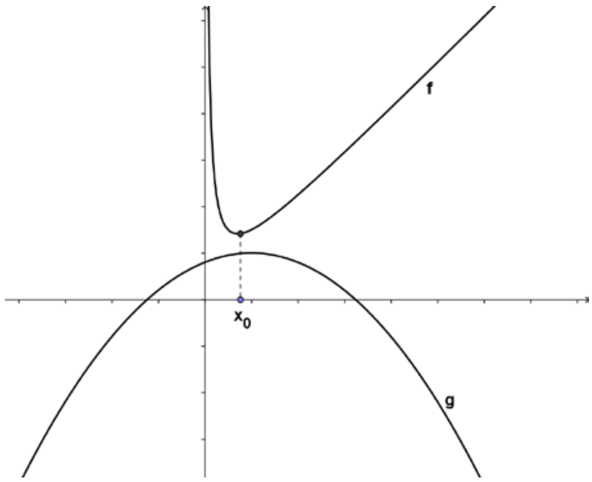
A) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\left(x^2-x+h\right)-\left(x^2-x\right)}{h}\right)=\ldots$

B) $f'(x)=\dfrac{\left((x+h)^2-(x+h)\right)-\left(x^2-x\right)}{h}=\dfrac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}=\ldots$

C) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\left((x+h)^2-(x+h)\right)-\left(x^2-x\right)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h}\right)=\ldots$

D) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\left((x+h)^2-x+h\right)-x^2-x}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{x^2+2xh+h^2-x+h-x^2-x}{h}\right)=\ldots$

19)
Die Abbildung zeigt die Graphen zweier Funktionen f und g. Angenommen, an der Stelle x_0 kommen sich die Graphen am nächsten, das heisst, der Abstand zwischen den Punkten $(x_0\ ,f(x_0))$ und $(x_0\ ,g(x_0))$ ist minimal. Dann gilt:



A) $f(x_0)=g(x_0)$
B) $f'(x_0)=g'(x_0)$
C) Die Funktion $f(x)-g(x)$ hat an der Stelle x_0 ein (lokales) Extremum.
D) $f''(x_0)=g''(x_0)$

21)
Ein Satellit in Form eines regelmässigen sechseckigen Prismas mit Volumen V = 12 m³ soll im Laderaum eines Rakete in eine Erdumlaufbahn geschossen werden. Zur Speisung mit Energie wird die Oberfläche möglichst dicht mit Solarzellen bepackt; es besteht also das Interesse, die Oberfläche des Satelliten möglichst gross zu machen, um möglichst viel Energie zu gewinnen. Wenn mit *h* die Höhe des Prismas und mit *a* die Kantenlänge der Sechsecke (Deckel und Boden) bezeichnet werden, wie müssen diese Grössen dann gewählt werden, damit die Oberfläche des Prismas maximal wird?

<u>Aus der Unterrichtseinheit:</u>

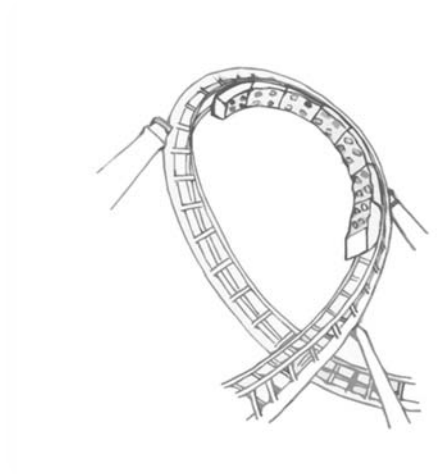
Starter

Im *Happy Horror Amusement Park* wird eine neue Achterbahn konzipiert. Ein Ausschnitt der Bahn kann durch die Funktion

$$y = -\frac{14}{8775}x^4 + \frac{472}{8775}x^3 - \frac{32}{65}x^2 + 10$$

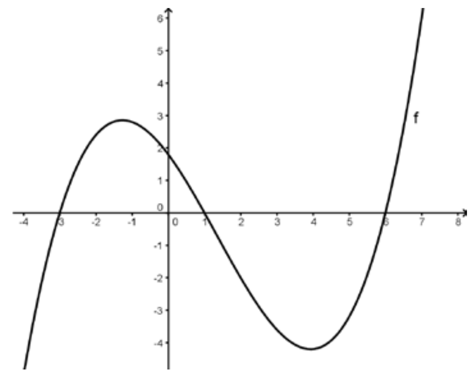
modelliert werden.

An welcher Stelle ist die Bahn am steilsten? Und wie steil? Wie lässt sich das entscheiden? Angenommen, die Hersteller der Wagen schreiben vor, dass das Gefälle der Bahn nirgends grösser als ein bestimmer Wert sein darf. Wie können wir berechnen, ob diese Vorschrift bei unserer Bahn eingehalten wird? Wie können wir allgemein eine Vorstellung über den Graphen der Ableitung einer gegebenen Funktion gewinnen und konkrete Steigungswerte rechnerisch ermitteln?



Wo genau stehen wir nun? Mit dem übergeordneten Ziel vor Augen, die in Sequenz 1 formulierte Frage nach Wesen, Formalisierbarkeit und Berechenbarkeit der Geschwindigkeit zu beantworten, haben wir in der Ableitung einer Funktion ein hierfür bestens geeignetes Instrument entdeckt. Das mathematische Modell des Differenzenquotienten (Steigung der Sekante) und der Ableitung (Steigung der Tangente) ist genau das, womit sich die zahlreichen naturwissenschaftlichen Fragestellungen, die unter dem Stichwort Geschwindigkeitsproblem subsummiert werden können, erfassen lassen. Wir können mit diesem Instrument aber noch nicht besonders gut umgehen. Es ist, als hielten wir ein glänzendes, neues Werkzeug in der Hand und wüssten noch nicht so recht, welche Art von Handwerk sich damit besonders erleichtern lässt und wie. Das soll sich nun schrittweise ändern. In dieser Sequenz lernen wir erstens, wie zu einer gegebenen Funktion die erste Ableitung qualitativ richtig skizziert werden kann und zweitens, wie die erste Ableitung rechnerisch bestimmt werden kann. Das erste verhilft uns zu einem besseren graphischen Verständnis der Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung, und das zweite stösst die Tür auf zu einem riesigen, bisher gänzlich unerforschten Raum: dem rechnerischen Umgang mit Ableitungen. Es wird sich nämlich zeigen, dass das alles andere als einfach ist und dass hier noch viel Arbeit und vor allem viele gute Ideen auf uns warten…

Angenommen, irgendeine Problemstellung hat auf den Graphen einer Funktion *f* geführt. Die erste Ableitung, f', ist wieder eine Funktion, die nämlich jeder Stelle *x* (an der die Funktion definiert ist) die Steigung von *f*, genauer: die Steigung der Tangente an den Graphen von *f* im Punkt $(x / f(x))$, zuordnet. Wie kann f' grob, aber im Wesentlichen richtig skizziert werden?



Wir könnten, so ähnlich wie das die Person hier mit einem Surfbrett macht, ein Lineal der Kurve entlang führen und an jeder Stelle die Steigung des Lineals schätzen und all diese Steigungswerte dann in einem neuen Koordinatensystem eintragen.

Es geht aber einfacher. Offensichtlich hat der Graph ja besonders bemerkenswerte Stellen, an denen die Steigung 0 ist, weil die Tangente horizontal zu liegen käme. An diesen Stellen –

---

3. Selbstheilende Kräfte: Was die Forschung über Selbsterklärungen weiss

Material zum Thema:

(1) Danielle S. McNamara, Joseph P. Magliano, "*Self-Explanation and Metacognition: The Dynamics of Reading*", The University of Memphis
(2) Michelene T. H. Chi, Nicolas De Leeuw, Mei-Hung Chiu, Christian Lavancher, "*Eliciting Self-explanations improves Understanding*", University of Pittsburgh, in: Cognitive Science 18, 437 – 477 (1994)
(3) Alexander Renkl (Schwäbisch Gmünd, Germany), Robin Stark, Hans Gruber, Heinz Mandl (University of Munich, Germany), "*Learning from worked-out examples: The effects of example variability and elicited self-explanations*", in: Contemporary Educational Psychology 23, 90 – 108 (1998)
(4) Thorid Rabe (Universität Potsdam), "*Textgestaltung und Aufforderung zu Selbsterklärungen beim Physiklernen mit Multimedia*", Logos Verlag, Berlin 2007

Aus (1):

In our research, we have defined self-explanation as the process of explaining text or material to oneself either orally or in writing. These explanations are generally based on information contained in the discourse context and relevant world knowledge. Self-explanation can be initiated because it is associated with an explicit comprehension goal to explain while reading (Chi, de Leeuw, Chiu, & LaVancher, 1994; Magliano, Trabasso, & Graesser, 1999; McNamara, 2004) or it can occur naturalistically, presumably as the result of a metacognitive awareness of a need to explain what is being read (Chi, Bassok, Lewis, Reimann, & Glasser, 1989) or a search for coherence (Graesser, Singer, & Trabasso, 1994). A good deal of research has shown that readers who self-explain either *spontaneously or when prompted to do so understand more from learning materials and construct better mental models of the content (Chi et al., 1989; Chi & VanLehn, 1991; Chi, de Leeuw, Chiu, & LaVancher, 1994; Magliano, Trabasso, & Graesser, 1999; Trabasso & Magliano, 1996; VanLehn, Jones, & Chi, 1992).*

Zu (2):

Beim Lernen muss immer wieder neues Wissen an das bestehende angebaut werden. Dieser Prozess kann vereinfacht werden dadurch, dass man S+S auffordert, aktiv zu konstruieren, was sie lernen sollen. *Self-explaining was shown to be effective at improving the acquisition of problem-solving skills.*

Der Selbsterklärungseffekt wurde in diversen Umfeldern nachgewiesen:
- Pirolli und Recker (1994) wiesen ihn nach im Zusammenhang mit dem Erlernen der Programmiersprache LISP.
- Ferguson-Hessler und de Jong (1990) wiesen ihn nach, als Probanden die Grundprinzipien von Elektrizität und Magnetismus lernen mussten.
- Nathan, Mertz und Ryan (1994) wiesen ihn nach im Zusammenhang mit dem Lösen von algebraischen Textaufgaben.

The whole idea of the new "talking science" approach is that students should learn to be able to talk science (to understand how the discourse of the field is organized, how viewpoints are presented, and what counts as arguments and support for these arguments), so that students can participate in scientific discussions, rather than just hear science.

Durchführung der Studie:
- Experimentgruppe und Kontrollgruppe, alles S+S derselben öffentlichen Schule in Pittsburgh.
- Keiner hatte vorher einen Kurs in Biologie genommen.
- Zuerst: Praetest (Abfrage des bisherigen Wissens über den Blutkreislauf des Menschen)
- Dann hatte jeder einen Text aus 101 Sätzen über den Blutkreislauf des Menschen zu lesen. Jeder Satz war auf ein separates Stück Papier gedruckt. Die S+S der Experimentgruppe wurden gebeten, nach jedem Satz in eigenen Worten zu erklären, was die genaue Bedeutung dieses Satzes ist. Die Kontrollgruppe erhielt keine solche Anweisung, wurde aber gebeten, den Text zweimal zu lesen, um ungefähr gleichlange Beschäftigung sicherzustellen.
- Zum Schluss (aber mindestens eine Woche später) absolvierten alle Probanden einen Posttest.
- Alle Sitzungen wurden gefilmt.
- Jede Antwort im Posttest wurde mit maximal 6 Punkten bewertet.

Ergebnis:
Both prompted and unprompted students gained significantly greater understanding from the pretest to the posttest. (…) However, from the pretest to the posttest, the gain was greater for the prompted group (32%) than the unprompted group (22%). (…) The difference between the two groups' improvement is even more dramatic if only the more difficult Category 3 and 4 questions are examined: The prompted group improved by 22.6% versus only 12.5% for the unprompted group.

Das ist besonders beeindruckend, wenn man Folgendes bedenkt: Der Text war sehr gut aufgebaut und ausformuliert, altersgerecht und gut zugänglich. Die Kontrollgruppe konnte den Text zweimal lesen. Und der Kontrollgruppe war es ja nicht untersagt, spontan und innerlich Selbsterklärungen zu formulieren.

Zu (3):

Beispiele bevorzugt:
- Anderson e.a. (1984, 1985) fanden im Zusammenhang mit dem Erlernen von LISP-Programming, dass die Probanden allgemeine Beschreibungen von Prozeduren ignorierten und stattdessen ausgeführte Beispiele zur Hand nahmen
- LeFevre und Dixon (1986) präsentierten den Probanden einerseits abstrakten Instruktionstext und andererseits ausgearbeitete Beispiele (worked-out examples) und stellten sie vor die Wahl, zu benutzen, was sie wollten. Beide Informationsquellen widersprachen einander, so dass aus den Arbeiten der Probanden festgestellt werden konnte, welche Quelle benutzt worden war. Die Probanden bevorzugten die Beispiele deutlich, selbst dann, also der Informationsgehalt der Beispiele reduziert und die Texte noch redundanter, lesefreundlicher und detaillierter gemacht und die Probanden eindringlich gebeten wurden, die Texte zu benutzen.

Eine der zentralen Fragen der Studie:
- *To what extent is near-transfer performance influenced by presenting multiple examples and by eliciting self-explanations?*

Durchführung der Studie:
- 56 Lehrlinge einer deutschen Bank beteiligten sich freiwillig an der Studie.
- In einem Pretest wurden grundlegende Algebrakenntnisse sowie das Vorwissen im Bereich Zins- und Zinseszinsrechnen abgefragt.
- Dann lasen alle einen instruierenden Text zum Thema Zins- und Zinseszinsrechnen. Die Experimentgruppe erhielt nun 9 worked-out Examples und wurde aufgefordert, die Beispiele zu bearbeiten und mit Selbsterklärungen Schritt für Schritt zu erklären. Die Kontrollgruppe erhielt dieselben 9 Beispiele mit der Aufforderung, sie zu lesen.
- Am Ende fand ein Posttest statt mit near-transfer Problemen.

Ergebnis:
For the algebra pretest, we found no significant group differences. (…) Similar results were obtained for the topic-specific test. (...) Thus, there were no significant group differences that threatened the internal validity of the experiment.
(…)
Near transfer was significantly fostered by the eliciting of self-explanations.

Aus (4):

In Anlehnung an deLeeuw und Chi (2003) kann man als Selbsterklärung zunächst die Anstrengungen und Versuche von Lernenden bezeichnen, sich den Inhalt eines Textes selbst zu erklären. (…) Selbsterklärungen umfassen in diesem Sinne kausales Argumentieren, das Erkennen von Implikationen, Analogiebildung, Vergleiche, Beispiele und relevante Assoziationen zu Vorerfahrungen. Ausgeschlossen sind (…) reine Paraphrasierungen, die fast wörtliche Wiederholungen des Textinhalts darstellen.

In mehreren Untersuchungen (…) hat sich gezeigt, dass Lerner bessere Behaltensleistungen und besseres Problemlösen zeigen, wenn sie sich Textinhalte erklären.
(…)
Dabei scheint nicht das laute Sprechen per se zu besserem Verständnis zu führen. Vielmehr werden solche Äusserungen, die nach der obigen Definition als Selbsterklärungen zu bezeichnen sind, für einen erfolgreichen Umgang mit Texten verantwortlich gemacht.
(…)
Demnach schlägt sich die Aufforderung zu Selbsterklärungen (im Vergleich zum Ausbleiben derselben) positiv in den Lernergebnissen nieder.
(…)
Selbsterklärungen müssen nicht notwendigerweise in wissenschaftlicher Hinsicht korrekt sein oder den Intentionen des Gestalters und den Zielen der Lernsituation entsprechen. (…) Es könnte die Sorge berechtigt sein, dass Lernende beim Selbsterklären ihre mitgebrachten und möglicherweise „falschen" Vorstellungen eher vertiefen als hinterfragen. (…) Andere Befunde zeigen allerdings keinen derartigen negativen Einfluss falscher Selbsterklärungen, was im Zusammenhang mit einem Biologietext damit begründet wird, dass die Lernenden beim Selbsterklären eher auf Inkonsistenzen in ihrem Wissen stossen und so Gelegenheit zur „Selbstreparatur" erhalten.

---

4. Rezepte: Beispiele von Selbsterklärungsaufgaben

Beispiel aus meinen Skripten…

<u>Lückenbüsser!</u>

a) Gilt $y^m = z$ (mit $y \geq 0$ und $m \in \mathbb{N}$), so nennt man y die $\boxed{}$ von z und notiert $\boxed{y = }$.

b) Sei $p \in \mathbb{N}$. Die p-te Wurzel der positiven reellen Zahl a ist $\boxed{}$, für die gilt: $\boxed{}$.

c) Sei $r = \sqrt[n]{s}$. Dann sind die Zahlen r und s sicherlich $\boxed{}$, und überdies gilt die Gleichung $\boxed{s = }$.

<u>Wahr oder falsch?</u>

a) Alice behauptet: „$(-2)^3 = -8$; folglich ist -2 die dritte Wurzel von -8." Hat sie recht? Begründen Sie!

b) Bob behauptet: „Die Zahl 16 hat zwei vierte Wurzeln, weil einerseits $2^4 = 16$ und andererseits $(-2)^4 = 16$ gilt.“ Hat er recht? Begründen Sie!

<u>Selber erklären:</u>

- Wie kommen Mathematikerinnen und Mathematiker auf die Idee a^{-n} (für $n \in \mathbb{N}$) als $\frac{1}{a^n}$ zu definieren? Bitte liefern Sie für diese Definition eine gute Motivation; erklären Sie auch, weshalb hierfür überhaupt eine Definition notwendig ist.
- Warum kann man sagen, (W1) sei ein Analogon zu (P2)? Bitte erläutern Sie die enge Verwandtschaft dieser beiden Regeln in einem Satz. Zudem: Wenn es ein Wurzelgesetz gäbe, das in diesem Sinne verwandt mit (P1) ist, wie müsste es heissen? Und gilt es?
- Bitte geben Sie den Wortlaut und einen Beweis des Handshaking Lemmas in eigenen Worten an. Richten Sie sich dabei an einen fiktiven Laien, der aber immerhin weiss, was ein Graph, was Knoten und Kanten sind.

<u>Shaken, not stirred!</u>

Ein Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ geriet in den Shaker. Bringen Sie die Teile in eine sinnvolle Reihenfolge, so dass sich ein klar strukturierter, stringent aufgebauter Beweis ergibt:

a) Dann müssten zwei natürliche Zahlen m und n existieren, so dass
b) $2 \cdot n^2 = m^2$.
c) Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational.
d) In der Primfaktorzerlegung der linken Seite jedoch käme der Primfaktor 2 in ungerader Anzahl vor.
e) Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational.
f) Da es sich bei m^2 um eine Quadratzahl handelt, müsste in der Primfaktorzerlegung der rechten Seite der Faktor 2 in gerader Anzahl vorkommen.
g) Die Annahme ist also haltlos, und daher kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein.
h) Damit haben wir einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.
i) Nach Quadratur und Multiplikation mit n^2 folgt dann
j) Beweis:
k) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ gilt.

<u>Beispiele von Schülerantworten zu Selbsterklärungsaufgaben</u>

Lernplattform: www.lernen.ethz.ch

Frage	Antwort
<u>Frage:</u> Sei s(t) = $-t^2+9$ eine Bewegungsgleichung. Welche der folgenden Behauptungen treffen zu? 1) Zwischen t=0 und t=3 ist die Geschwindigkeit des bewegten Objektes positiv. 2) Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen t=0 und t=3 beträgt -3 LE/ZE. 3) Es gibt einen Zeitpunkt zwischen t=0 und t=3, zu dem die momentane Geschwindigkeit exakt -3 LE/ZE beträgt. 4) Zwischen t=0 und t=3 ist die (momentane) Geschwindigkeit des bewegten Objektes streng monoton wachsend. 5) Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen t=0 und t=1 ist grösser als diejenige zwischen t=0 und t=2.	Korrekt sind 2, 3 und 5. Zu Punkt 4: Sie ist streng monoton fallend! Zu Punkt 5:Der Betrag der Geschwindigkeit ist zwar grösser, da es aber die negative Richtung ist, wird sie kleiner.
Wenn man anstelle einer Bewegungsgleichung s(t) eine Geschwindigkeitsfunktion v(t) zugrunde legt, welche physikalische Grösse erhält man dann bei der Berechnung von Termen der Art (v(t+h)-v(t)) / h ?	Wenn man den Unterschied der Geschwindigkeit durch die dabei verstrichene Zeit dividiert erhält man die durchschnittliche Beschleunigung dieses Zeitraumes.
Erläutern Sie in einem Satz den prinzipiellen Unterschied zwischen der Bedeutung des Differenzenquotienten und der Bedeutung des Differentialquotienten.	Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion zwischen zwei Punkten an (Steigung der Sekante, im Intervall Delta x), der Differentialquotient gibt die momentane Änderungsrate (Steigung der Tangente) bei einem bestimmten Punkt an, der Differentialquotient gibt also den Grenzwert des Differenzenquotienten für ein kleiner werdendes Delta x an.
Beenden Sie diese Definition: „Die erste Ableitung der Funktion f nach der Variablen x ist …“	... die momentane Änderungsrate (Steigung der Tangente) beim Punkt x.
Erläutern Sie in wenigen Worten, welche konkrete Bedeutung der Term (Delta y) / (Delta x) hat für den Fall a) y = Meerestiefe eines senkrecht abtauchenden U-Bootes, x Sekunden nach Beginn des Tauchvorgangs b) y = Anzahl Grippeinfizierter in Asien, x Tage nach Beginn der Messung c) y = Geschwindigkeit eines fahrenden Liftkabine, x Sekunden nach Beginn der Messung d) y = Konzentration eines Doping-	a) Durchschnittl. Tauchgeschwindigkeit im Intervall Delta x (in Sekunden). b) Durchschnittl. Änderungsrate der Grippeinfizierten in Asien im Intervall Delta x (in Tagen). c) Durchschnittl. Änderungsrate der Geschwindigkeit, also die durchschnittliche Beschleunigung Im Intervall Delta x (in Sekunden). d) Durchschnittl. Änderungsrate der Dopingkonzentration im Blut im Intervall Delta x (in Stunden)

mittels, x Stunden nach Einnahme	
Jemand formuliert sehr ungenau: „Die erste Ableitung einer Funktion ist die Tangente." Verbessern Sie diese Formulierung zu einer Aussage, die in einem Lehrbuch Eingang finden könnte.	Die 1te Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 misst die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt (x_0 , ($f(x_0)$)), also die momentane Änderungsrate.
a) Geben Sie eine konkrete Funktion f und eine konkrete Stelle x an, so dass f'(x)=0 gilt. b) Geben Sie eine konkrete Funktion f an, so dass f'(x)=3 gilt für alle erlaubten Inputs. c) Geben Sie eine konkrete Funktion f an, so dass f''(x)=0 gilt für alle erlaubten Inputs. d) Geben Sie eine konkrete Polynomfunktion f an, so dass f'(x)<0 gilt für alle x<2 und f'(x)>0 für alle x>2.	a) f(x)=3, somit ist die Steigung der Tangente überall Null. Also beim Punkt (5/3) ist die Steigung Null. b) f(x)=3x c) f(x) = 2x d) $f(x) = x^2 - 4x$
Betrachten Sie die Funktion $f(x)=x^7$. Wenn Sie die erste Ableitung mit Hilfe der „h-Formulierung" der Definition berechnen, ist es nützlich, den Binomischen Lehrsatz zu verwenden, um $(x+h)^7$ als Summe zu schreiben. Nennen Sie die für die Rechnung relevanten Summanden dieses Terms, und erklären Sie, wie es Ihnen damit nun gelingt, die Ableitung von f erfolgreich zu berechnen.	f'(x)= lim (darunter h tendiert zu 0) (f(x+h)-f(x))/h, also lim $((x+h)^7-x^7)/h$. Bei $(x+h)^7$ kann man mit dem Pascalschen Dreieck die Koeffizienten herausfinden. Der erste Koeffizient ist $1(x^7)$, im weiteren wird der Exponent von x immer um 1 kleiner, während der Exponent von h immer um eins grösser wird, sodass der letzte Summand so aussieht: $1(h^7)$. Da $f(x)=x^7$ ist, kürzt sich dieser Summand mit dem ersten weg und es bleiben noch die Summanden von $(x+h)^7$ übrig ohne den ersten Summanden halt! So haben jetzt alle Summanden ein h, weshalb man als nächstes h ausklammern kann und h dann mit dem h im Nenner wegkürzen kann. Jetzt lässt man h zu 0 tendieren und schaut was passiert. Alle Summanden die ein h haben, kann man theoretisch wegstreichen, da ihr h zu 0 tendiert. Der erste Summand, der kein h mehr hatte nach dem ausklammern, der bleibt übrig und lautet: $7*(x^6)$.
Sei p irgendeine Polynomfunktion vom Grad n. Welchen Grad hat dann die erste Ableitung von p? Was wird also zwangsläufig immer geschehen, wenn man von einer Polynomfunktion die erste, zweite, dritte,… Ableitung bildet? Ab welcher Ableitungsnummer wird sich die Ableitung nicht mehr ändern?	Die erste Ableitung von p hat Grad n-1.Der Grad der Polynomfunktion nimmt pro Ableitung mindestens eine Einheit ab bis Grad 0 erreicht wird. Ab dann wird sich die Ableitung nicht mehr ändern. Das erfolgt spätestens bei der Ableitungsnummer = Grad der Polynomfunktion + 1
Stellt man einen Differentialquotienten auf, so muss man ja unter anderem den Term f(x+h)-f(x) bilden. Hugo, ein mathematischer Laie, behauptet nun, dass f(x+h)-f(x) = f(h) sei. Ist diese Behauptung korrekt für f(x)=sin(x)? Ist sie korrekt für eine lineare	1) sin (3*pi/2) - sin(pi/2) = -2 und sin(pi) = 0 , somit stimmt es nicht ! 2) f(x) = a*x+b. a*(x+h)+b - (a*x+b)=a*h, somit stimmt

Funktion? Ist sie korrekt für f(x)=a*x?	es nicht, denn es müsste a*h+b ergeben damit es stimmt, es ergibt aber nur a*h also stimmt es nicht. 3) Ja! Erstaunlicherweise!
Der Beweis der Produktregel lebt von einer überaus reizvollen kleinen Idee. Schildern Sie die Beweisidee bitte in wenigen Sätzen und Ihren eigenen Worten.	Die Grundidee ist eine Erweiterung des Differentialquotienten mit dem Term -f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h), welcher offensichtlich gleich 0 ist, das muss er ja auch, damit man den Differentialquotienten nicht verändert. Dieser Term führt nun dazu, dass man bei den ersten beiden Summanden g(x+h) ausklammern kann und dann also g(x+h)(f(x+h)-f(x)) hat. Bei den Summanden 3 und 4 kann man hingegen f(x) ausklammern, und das gibt dann f(x)(g(x+h)-g(x)). Also hat man mit allem Drumherum, etwas umgestellt, folgendes Bild: lim (g(x+h)(f(x+h)-f(x))/h) + lim (f(x)(g(x+h)-g(x))/h). Nun kann man problemlos fertigrechnen. Ohne eine geschickt gewählte Erweiterung des Differentialquotienten könnte man die obige Ableitung nicht durchführen. Der Erweiterungsterm muss einfach so gewählt werden, dass die beiden Funktionen f und g getrennt voneinander abgeleitet werden können, voneinander gelöst werden. Das wird dadurch möglich, dass man so erweitert, dass zum einen der Differentialquotient von f ersichtlich wird und zum anderen jener von g.
Begründen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: „Es sei g(x) eine Polynomfunktion vom Grad 4. Dann hat g höchstens drei Wendepunkte.“	Nein, höchstens 2. Wir haben ja ermittelt, dass eine Polynomfunktion n-ten Grades höchstens n-1 Extrema besitzt. Also in diesem Fall 3. Und wenn die Funktion 3 Extrema besitzt, können es ja gar nicht 3 Wendepunkte sein. Denn ein Wendepunkt entsteht zwischen zwei Extrema. Also gibt es höchstens n-2 Wendepunkte. In diesem Fall 2. <u>Sonntag-Morgen Aufheiterung</u>: Mathematiker sterben nicht. Sie verlieren nur einige ihrer Funktionen. Haha! Treffen sich ein Operator und eine Funktion. Sagt der Operator: „Lass mich vorbei, oder ich leite Dich ab.“ Sagt die Funktion: „Mach doch, mach doch, ich bin die Funktion e^x.“ Kommt ein Vektor in einen Drogenladen und sagt: „Ich bin linear abhängig.“ Kommt ein Nullvektor zum Psychiater: „Herr Doktor, ich bin orientierungslos.“ Wie befreit sich ein Mathematiker aus einem geschlossenen Käfig? Er definiert: Hier ist aussen!