$AM \cap P \neq \emptyset$

H.R. Schneebeli

4.11.2011

Übersicht

1. **Mathematische Vorbereitungen im Grundlagenfach**
2. **Fallende Körper**
   Aristoteles vs Galilei
   Differentialgleichungen und Bewegungsgesetze
3. **Semesterarbeiten, Maturaarbeiten**
4. **Experimente**

Dokumentation

Differentialgleichungen für den Fall des Falles

www.swisseduc.ch/Mathematik

Vorbereitung im Grundlagenfach, vor Beginn PAM

Datenanalyse, Regression

Arbeitswoche zu Galilei:
Einführung ins Experimentieren

Fehlerstatistik
Messen vs Simulation
Wie kommt man von Daten zu Funktionen?

Einführung in die Analysis, ab Beginn PAM

1. Drei klassische unlösbare Aufgaben
2. Paradoxa von Zeno: Achilles und die Schildkröte, fliegender Pfeil
3. Archimedes' Quadratur des Parabelsegmentes
4. Näherungen für π
5. Zylinder, Kegel, Kugel
6. Kepler's Fassregel
7. Kürzeste Lichtwege, Fermatprinzip und Extrema
8. Newton und das Gravitationsgesetz, Principia
   Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung
9. Leibniz, Tangenten
10. Zusammenfassung und Begriffsbildung:
    - Differenzenquotient und Ableitung
    - Riemannsumme und bestimmtes Integral

Methodische Leitlinie für Einführung der Analysis

Aufgaben, die mit finiten Methoden unlösbar sind, lassen sich manchmal in zwei Schritten lösen:

- Diskretisieren und Lösen des diskreten Ersatzproblems
- Diskretisierungsfehler durch Grenzübergang tilgen.

Wenn diese Methode funktioniert, sprechen wir in der Schule von Analysis.

Verwendung von CAS-Rechnern

Analysis $\neq$ Calculus

Aristoteles' Vorstellung vom freien Fall

Geschwindigkeit fallender Körper nimmt zu.
Beim freien Fall aus der Ruhelage ist die Geschwindigkeit proportional zur durchfallenen Wegstrecke.

$$s' = \alpha \cdot s$$

Galileos Modell zum freien Fall

Beim freien Fall aus der Ruhelage ist die Geschwindigkeit proportional zur Fallzeit.

$$s' = g \cdot t$$

Galilei vernachlässigt den Luftwiderstand.

Euler's numerisches Verfahren löst ein diskretes Ersatzproblem

- In der numerischen Simulation bleibt der Stein in der Luft hängen
- Mit dem Eulerverfahren lässt sich weder Existenz noch Eindeutigkeit der Lösung beweisen.
- Bestenfalls findet man Polynomapproximationen

$$v(t) \approx v_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha \cdot t}{n}\right)^n$$

Lösung der Bewegungsgleichungen mit Potenzreihenansatz

Newton's bevorzugte Methode
(er glaubte, dass alle Funktionen analytisch seien)

Die Berechnung der Koeffizienten der Potenzreihe, die die Lösung darstellt, ist eine unendliche Kette von algebraischen Aufgaben.
[diskretes Ersatzproblem]
nach endlich vielen Schritten ergibt sich ein Polynom

$$v_n(t) = v_0 \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} (\alpha \cdot t)^r \right)$$

Separation der Variablen

Modellierung mit Luftwiderstand

$$v' = g + c \cdot v \quad \text{oder} \quad v' = g + k \cdot v^2 \quad \text{je mit} \quad v(0) = 0$$

Einsatz eines CAS-Rechners als Black Box, **Gerüstdidaktik**

oder analytische Lösung, Calculus:

- Reduktion auf eine Integration
  Setzt Hauptsatz der Integralrechnung und Kettenregel voraus
- Funktionsinversion

Aufgaben und mehr

Lernaufgaben

- Varianten zu den Fragestellungen
- Grenzen der Modelle, zB Luftwiderstand

Semesterarbeiten oder Maturaarbeiten

- Kann ein Fallschirmspringer im freien Fall die Schallmauer durchbrechen?
  Der Fall des Major Fournier
- Eine Umkehrung der Bewegung:
  Aufstieg eines Ballons
  Gasblasen im Sektglas

Experimente

Parameter für die Modellierung selbst bestimmen
Modelle überprüfen

- Erdbeschleunigung
- Widerstandsgesetze, Reibung, Endgeschwindigkeit
  - laminare Strömung: Fallversuche in Flüssigkeiten, kleine Kugeln
  - turbulente Strömung: Hütchenversuch