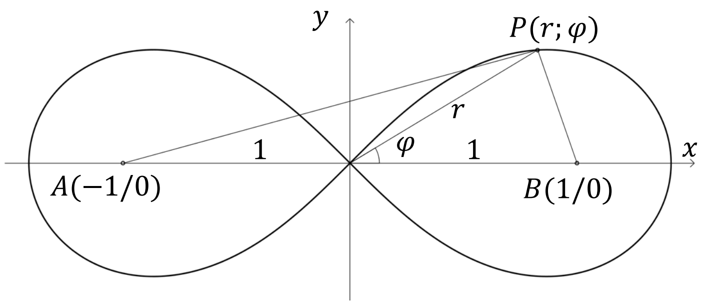
Polarformen

Gesucht sind die Polarkoordinaten der Punkte $P(r;\varphi)$, welche die Bedingung $\overline{AP}\cdot\overline{BP} = 1$ erfüllen.



Mit Hilfe einiger trigonometrischer Kenntnisse (Cosinussatz, Doppelwinkelformel,…) formen wir nun um:

$$1 = \overline{AP}\cdot\overline{BP} = \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180° - \varphi)}\cdot\sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

$$1 = \sqrt{1 + r^2 + 2rcos(\varphi)}\cdot\sqrt{1 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

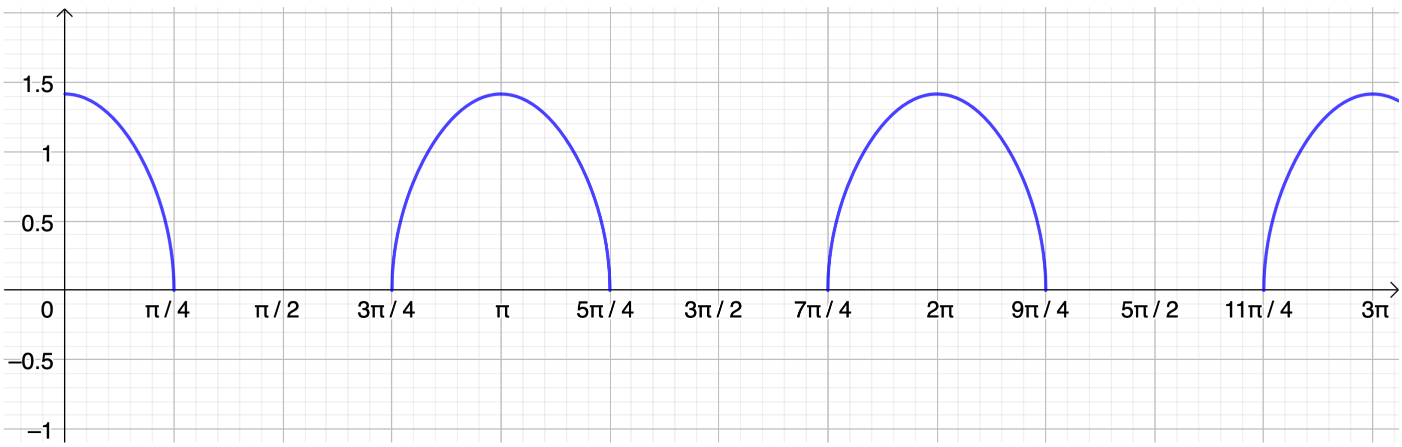
Daraus folgt $\quad 1^2 = (1 + r^2)^2 - (2rcos(\varphi))^2 = 1 + 2r^2 + r^4 - 4r^2cos^2(\varphi)$

und somit $\quad 0 = r^2(2 + r^2 - 4cos^2(\varphi))$.

Entweder ist also $r = 0$ oder aber $r^2 = 4cos^2(\varphi) - 2 = 2\cdot\cos(2\varphi)$.

Die Polarform unserer Bernoulli'schen Lemniskate ist somit: $\boxed{r(\varphi) = \sqrt{2\cdot cos(2\varphi)}}$

Bemerkung:
Die entsprechende Funktion $y = f(x) = \sqrt{2\cdot cos(2x)}$ besitzt folgenden Graphen:

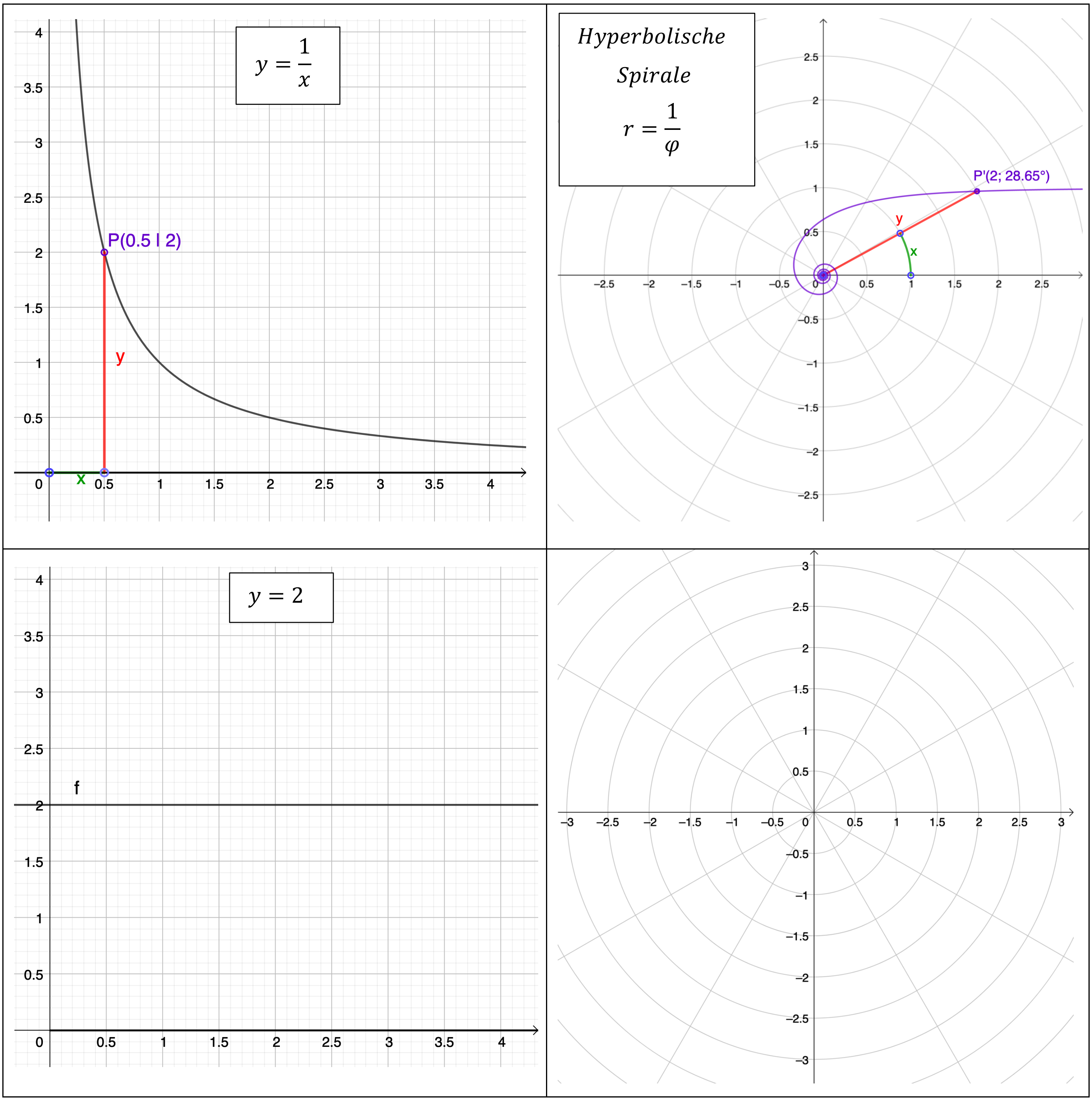


Polarformen Übungen

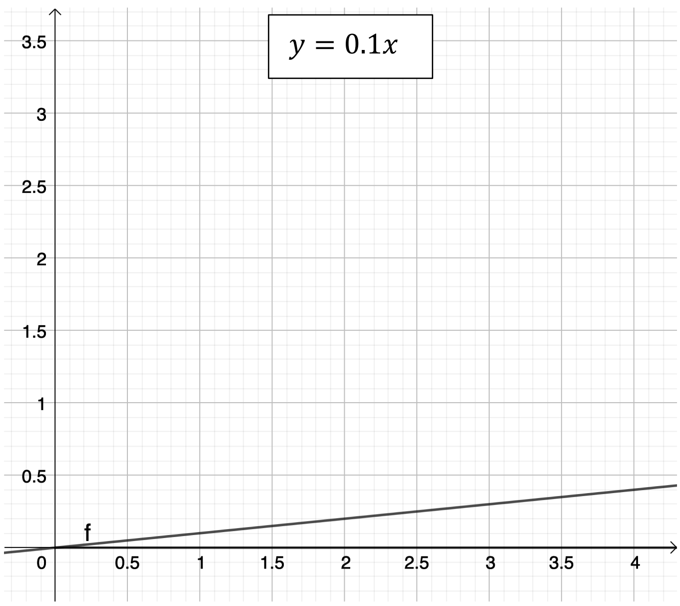
Links ist jeweils ein Funktionsgraph zu einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ eingezeichnet. Kurvenpunkte $P(x/y)$ werden dann rechts ins Polarkoordinatensystem als $P'(r;\varphi)$ übertragen, wobei der Abstand r zum Ursprung dem y-Wert von P und der Winkel φ dem x-Wert von P entspricht. Hierbei ist der Winkel in Bogenmass zu verstehen: Die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis entspricht also gerade dem x-Wert von P.

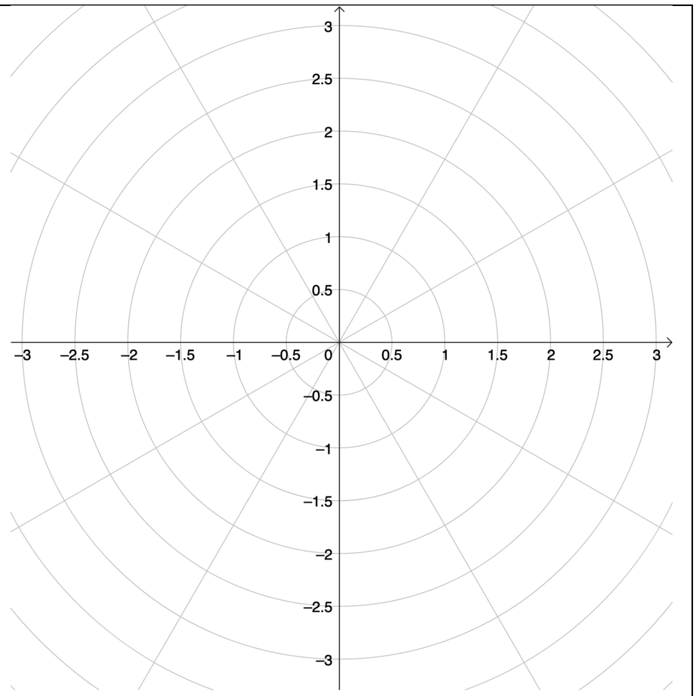
Übertrage so jeweils von links ein paar Punkte P als P' nach rechts. Welche Kurve entsteht rechts, falls alle unendlich vielen Punkte P des Funktionsgraphen übertragen werden? Fertige dazu eine Skizze an.

Wie heisst die zugehörige Polarform $r = f(\varphi)$?

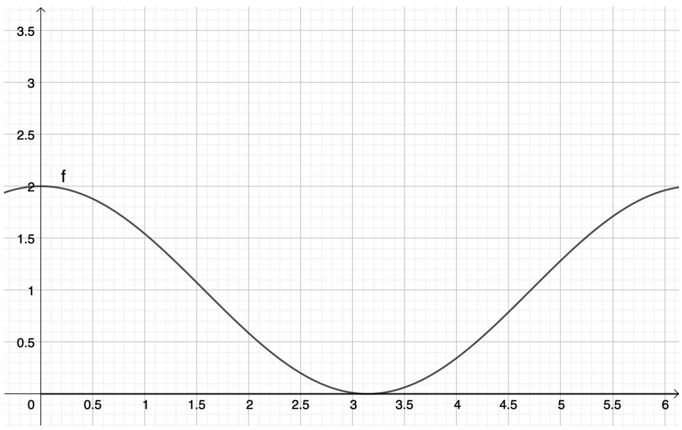


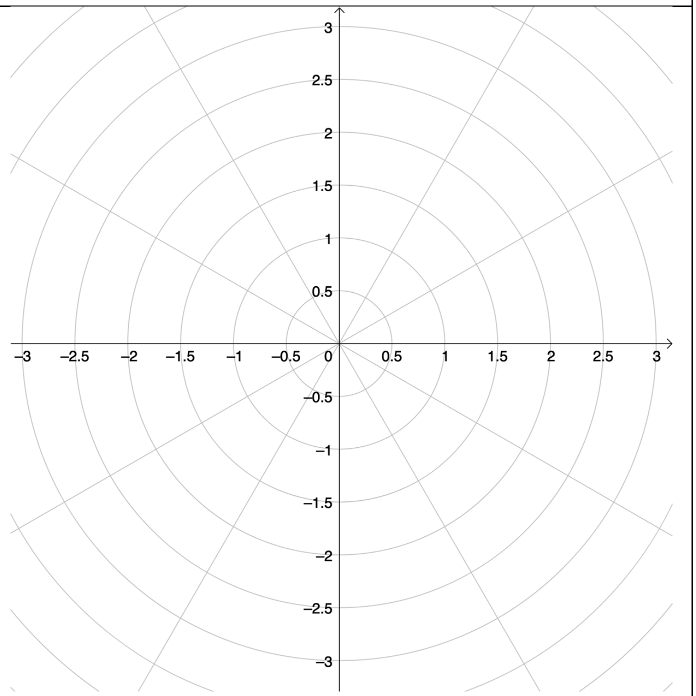
$y = 0.1x$



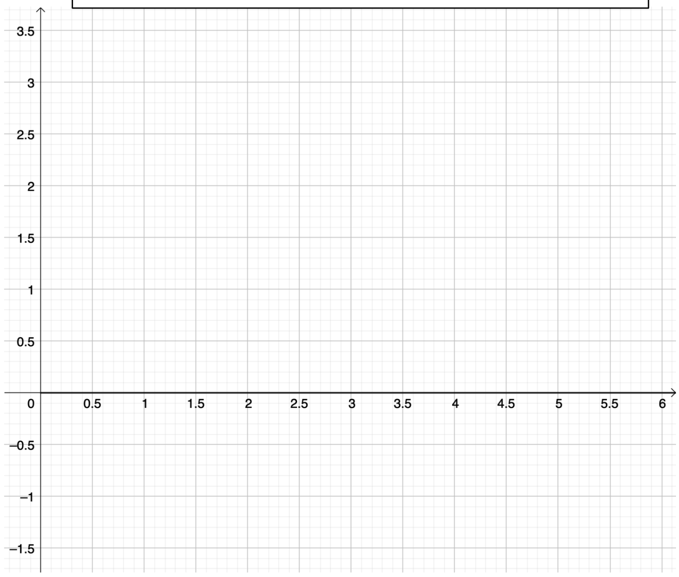


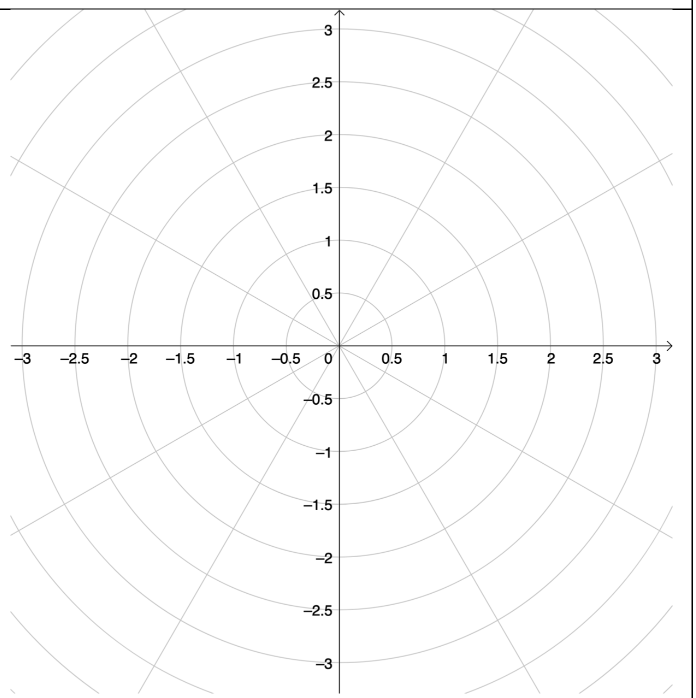
$y = 1 + \cos(x)$





$eigenes\ Beispiel: y =$





Übungen zur Bernoulli'schen Lemniskate (BL) im Zusammenhang mit den Polarformen:

1. Die BL $r = \sqrt{2 \cdot cos(2\varphi)}$ wird vom Nullpunkt aus mit dem Streckfaktor k zentrisch gestreckt.

   a) Bestimme die Gleichung der gestreckten Kurve in Polarform, falls $k = 3$.

   b) Wie gross ist der Streckfaktor k zu wählen, um auf die einfache Gleichung $r = \sqrt{cos(2\varphi)}$ zu kommen? Bestimme die Koordinaten der zugehörigen Brennpunkte A und B.

2. Die BL $r = \sqrt{cos(2\varphi)}$ wird um den Nullpunkt mit dem Winkel ε gedreht.

   a) Bestimme die Gleichung der gedrehten Kurve in Polarform.

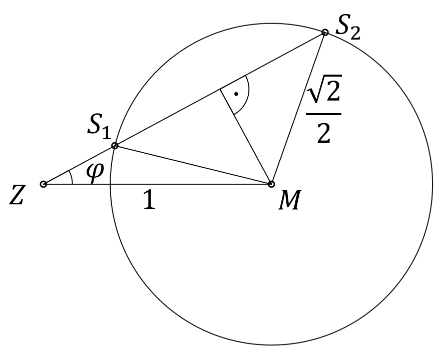
   b) Im Spezialfall $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$ erhält man die Gleichung $r = \sqrt{sin(2\varphi)}$. Zeige dies!

   Bestimme die Koordinaten der zugehörigen Brennpunkte A und B.

   c) Bestimme die Polarform der BL mit den Brennpunkten $A(-2/-2)$ und $B(2/2)$.

3. In folgender Figur ist der Kreisradius $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und der Abstand von Z zum Kreismittelpunkt M gleich 1.

   Berechne die Sehnenlänge $\overline{S_1S_2}$ in Abhängigkeit von φ. Was fällt auf?



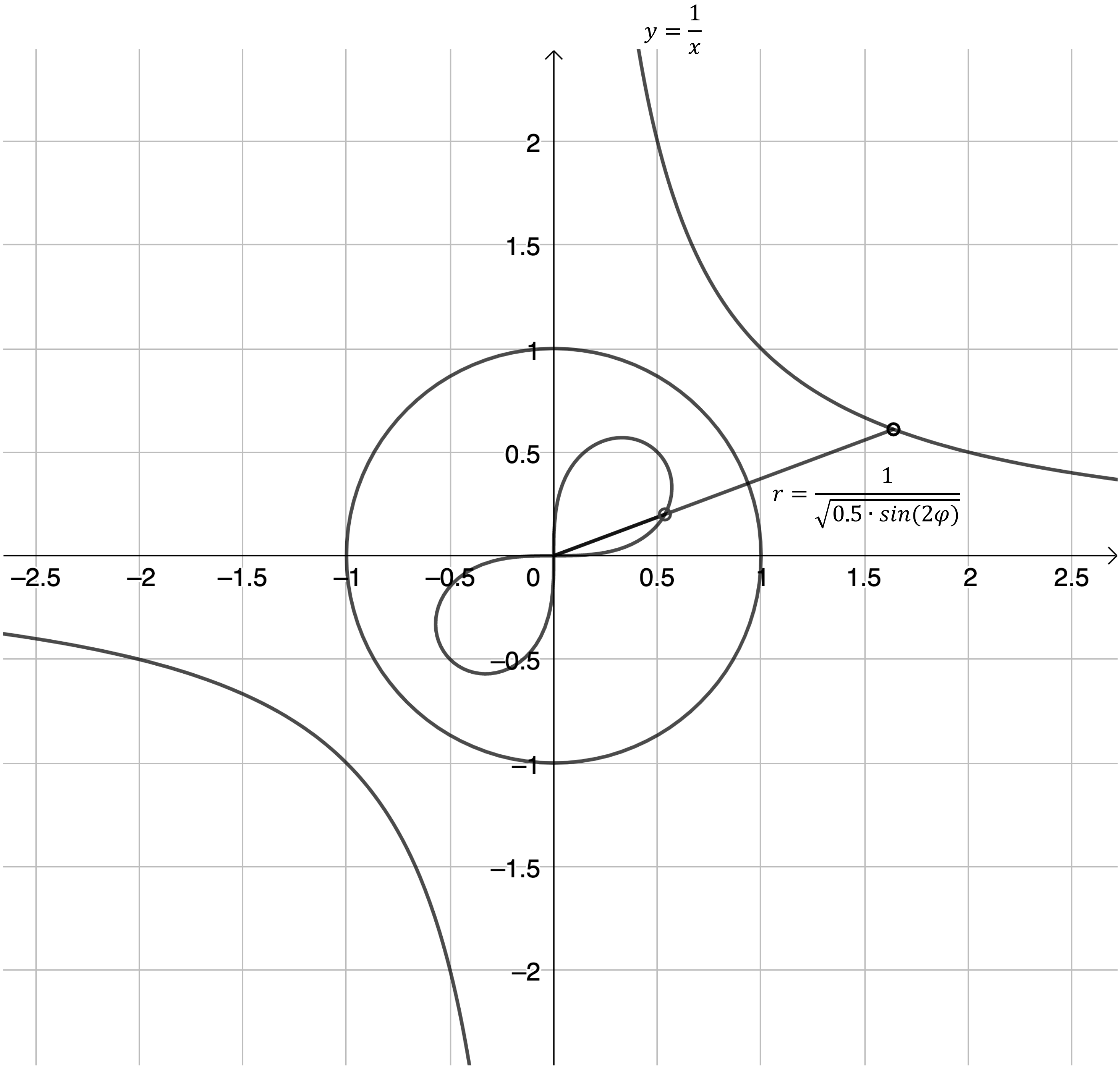
4. a) Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte A und B der BL mit der Gleichung $r = \sqrt{0.5 \cdot sin(2\varphi)}$.

b) Wird anstelle von r jeweils der Kehrwert $\frac{1}{r}$ genommen, so spricht man von einer «Inversion am Einheitskreis». Bei dieser BL ist somit die Polarform der invertierten Kurve $r = \frac{1}{\sqrt{0.5 \cdot sin(2\varphi)}}$.

Zusammen mit $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$ erhält man dann die Kehrfunktion $y = \frac{1}{x}$.

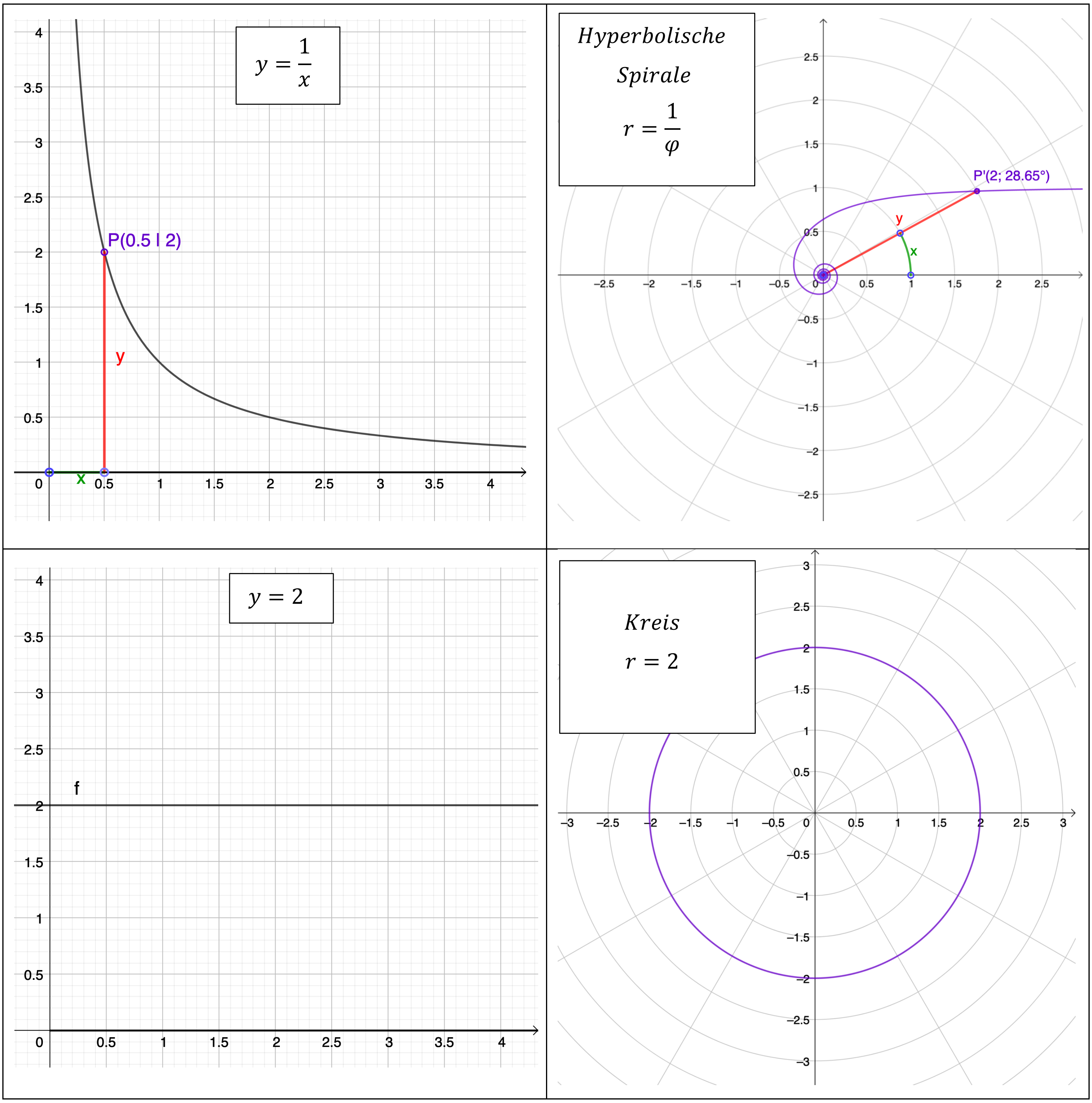
Zeige dies mit Hilfe der Doppelwinkelformeln.

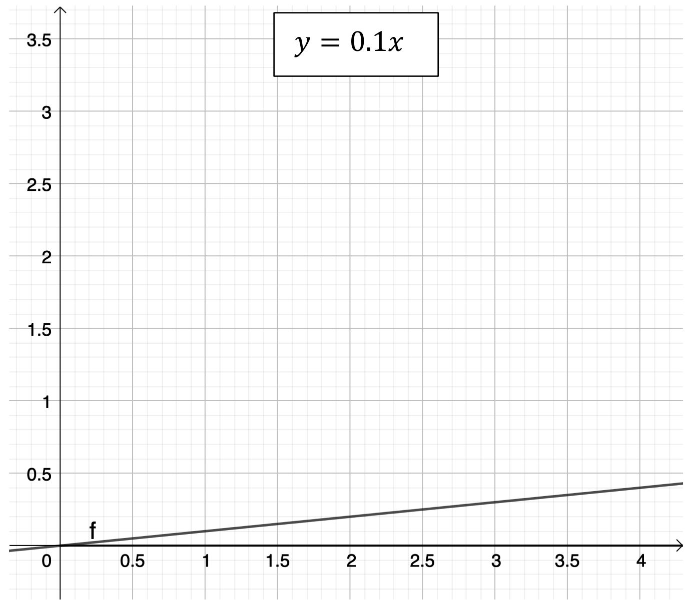
Fazit: Invertiert man eine BL am Einheitskreis, so entsteht eine gleichschenklige Hyperbel! Die Tangenten der BL im Nullpunkt entsprechen den Koordinatenachsen, welche Asymptoten der Hyperbel sind.

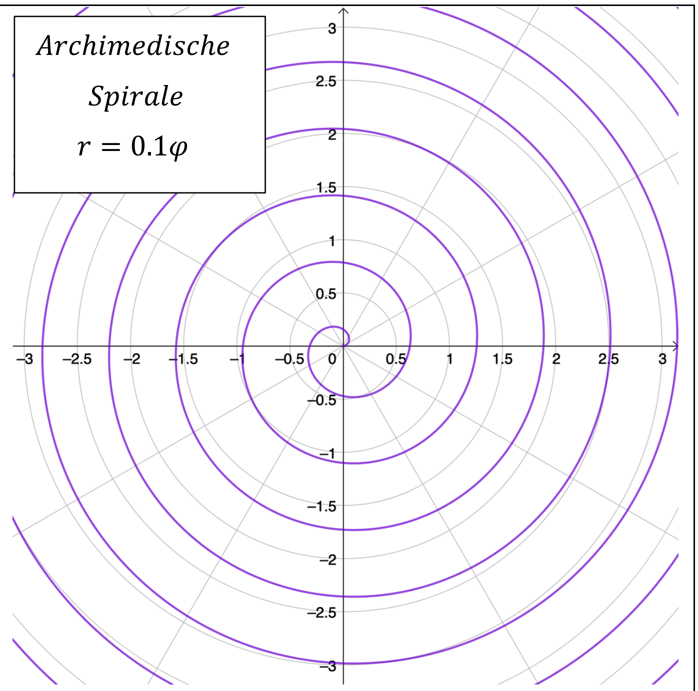


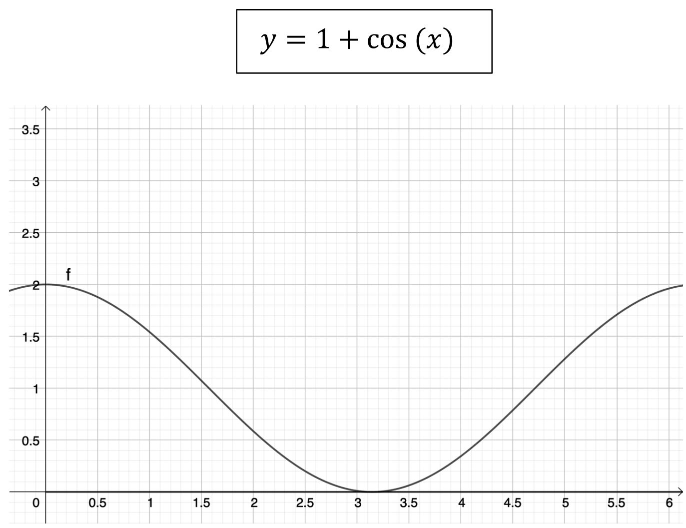
Lösungen

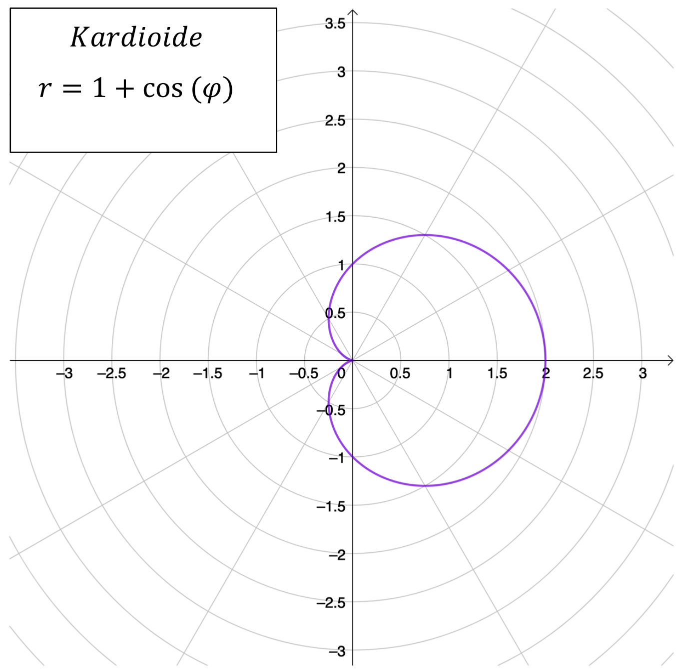
Links ist jeweils ein Funktionsgraph zu einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ eingezeichnet. Kurvenpunkte $P(x/y)$ werden dann rechts ins Polarkoordinatensystem als $P'(r;\varphi)$ übertragen, wobei der Abstand r zum Ursprung dem y-Wert von P und der Winkel φ dem x-Wert von P entspricht. Hierbei ist der Winkel in Bogenmass zu verstehen: Die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis entspricht also gerade dem x-Wert von P.

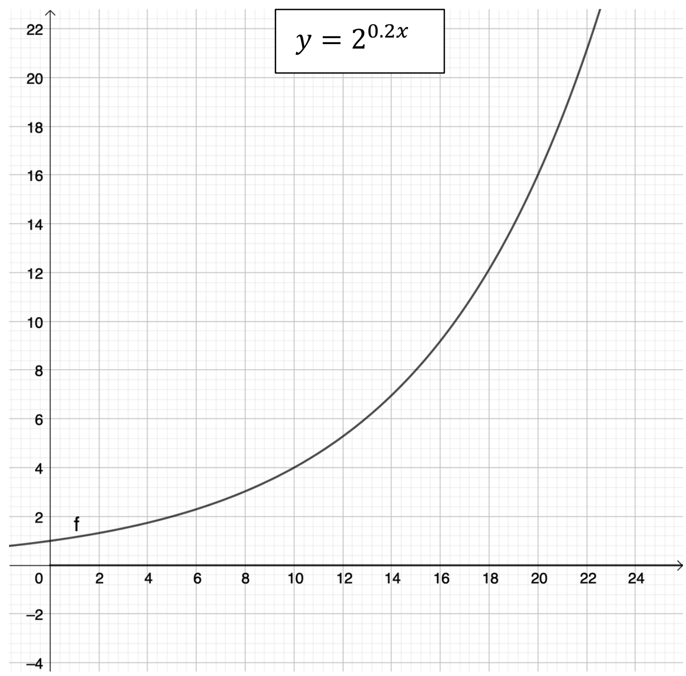


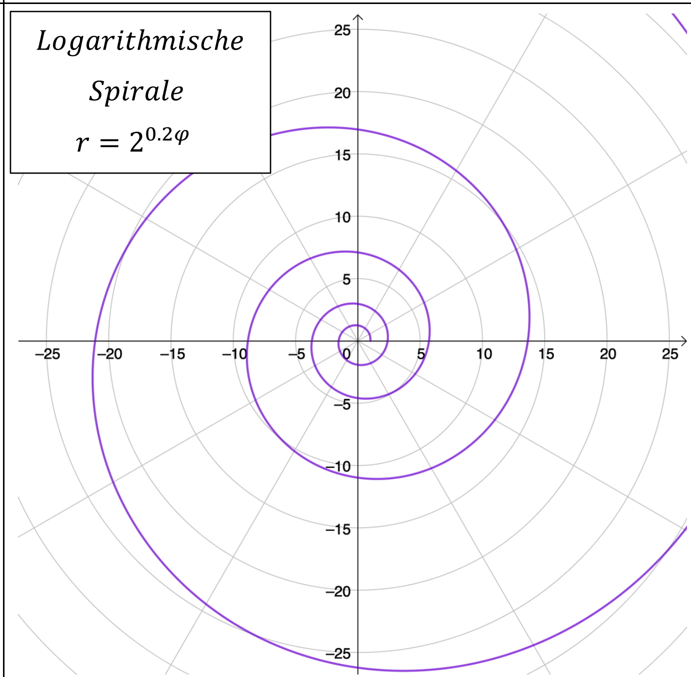

$y = 0.1x$
f


Archimedische
Spirale
$r = 0.1\varphi$


$y = 1 + \cos(x)$
f


Kardioide
$r = 1 + \cos(\varphi)$


$y = 2^{0.2x}$
f


Logarithmische
Spirale
$r = 2^{0.2\varphi}$

1. a) $r = 3\sqrt{2cos(2\varphi)}$

b) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}/0), B(\frac{\sqrt{2}}{2}/0)$

2. a) $r = \sqrt{cos(2(\varphi - \varepsilon))}$

b) $r = \sqrt{cos(2(\varphi - \frac{\pi}{4}))} = \sqrt{cos(2\varphi - \frac{\pi}{2})} = \sqrt{sin(2\varphi)}, A(-0.5/-0.5), B(0.5/0.5)$

c) $r = 4\sqrt{sin(2\varphi)}$

3. Für beliebiges φ wird die Sehnenlänge $\overline{S_1S_2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - sin^2(\varphi)} = \sqrt{2(1 - 2sin^2(\varphi))} = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$.
Dies entspricht $r(\varphi)$, also der Polarform einer BL!
Bemerkung: Diese «Zissoideneigenschaft» gibt uns eine neue einfache Konstruktionsmöglichkeit für eine BL.

4. a) $r = \sqrt{0.5 \cdot sin(2\varphi)} = \sqrt{0.5} \cdot \sqrt{sin(2\varphi)}$ und somit $A(-\frac{\sqrt{2}}{4}/-\frac{\sqrt{2}}{4}), B(\frac{\sqrt{2}}{4}/\frac{\sqrt{2}}{4})$

b) Wir zeigen $x \cdot y = 1$:

$$x \cdot y = r \cdot \cos(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi) = r^2 \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{0.5 \cdot \sin(2\varphi)} \cdot \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\sin(2\varphi)} = 1$$