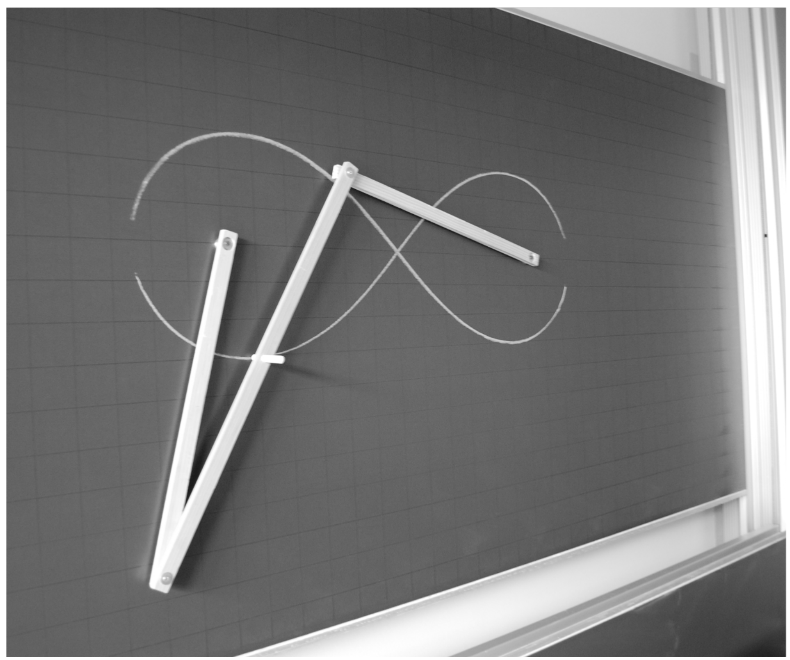
DMK
Deutschschweizerische Mathematikkommission

VSMP
Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Die Bernoulli’sche Lemniskate im Unterricht



Inhalt

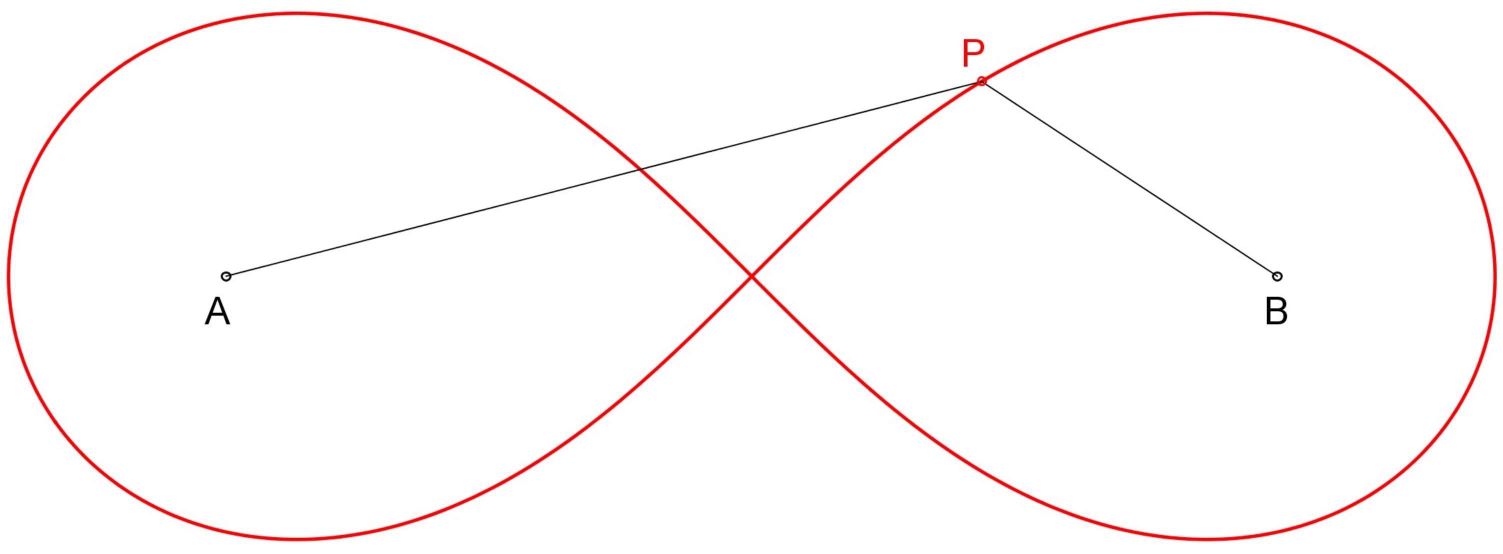
I. Geometrische Orte
II. Koordinatengleichungen
III. Polarformen
IV. Allerlei

I. Geometrische Orte

Übungsblatt

Die BL als geometrischer Ort

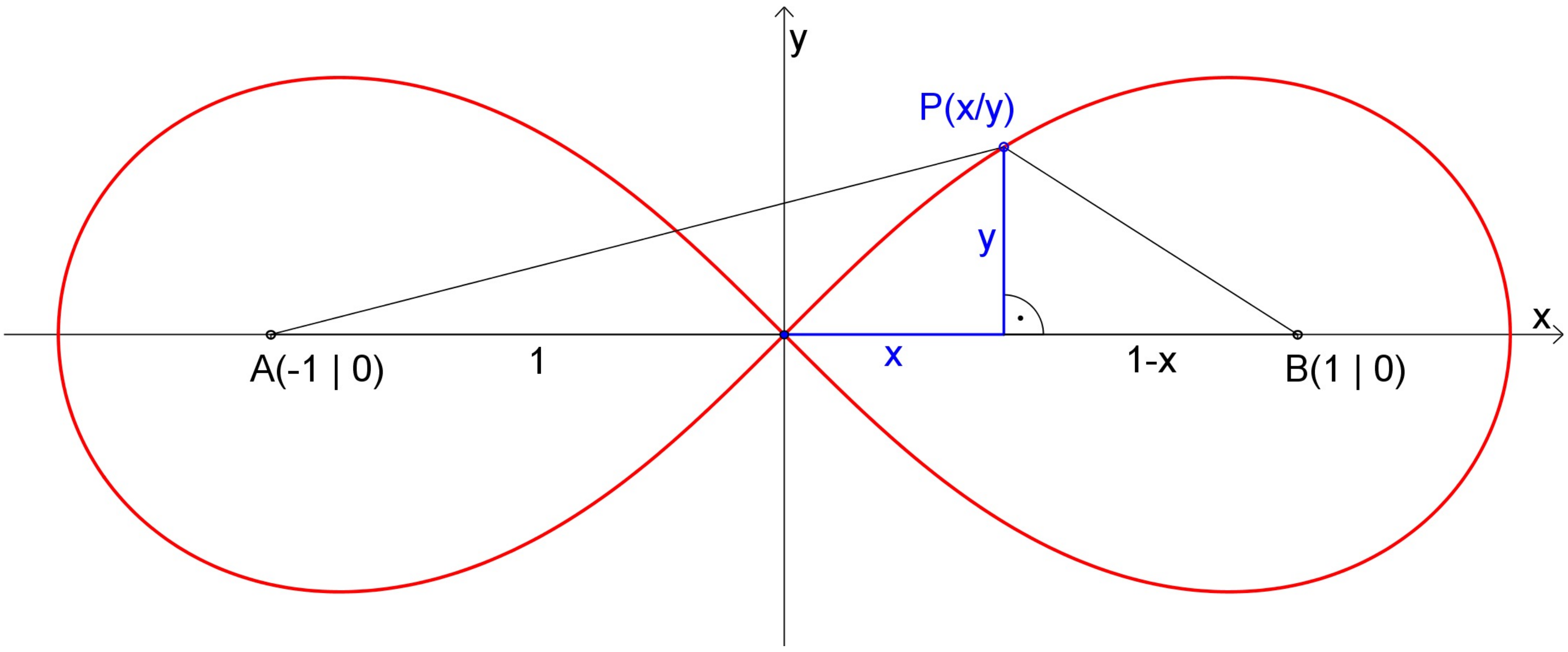
A und B sind zwei fixe Punkte im Abstand 2.
Die Menge aller Punkte P, für welche
$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ gilt, ist eine BL.



II Koordinatengleichungen

Übungsblatt: Geometrische Orte im Koordinatensystem

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$



Koordinatengleichung:

$$1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$
$$1 = ((1+x)^2 + y^2) \cdot ((1-x)^2 + y^2)$$
$$1 = (1+x)^2(1-x)^2 + (1+x)^2 y^2 + (1-x)^2 y^2 + y^4$$
$$1 = (1-x^2)^2 + 2y^2 + 2x^2y^2 + y^4$$
$$1 = 1 - 2x^2 + x^4 + 2y^2 + 2x^2y^2 + y^4$$
$$2x^2 - 2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\boxed{2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2}$$

Übungen:

- $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$, mit $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ liefert
  $2c^2(x^2 - y^2) = (x^2+y^2)^2$,

  also insbesondere für $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

  $\boxed{x^2 - y^2 = (x^2+y^2)^2}$

- $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 2c^2$, mit $A(-c/-c)$ und $B(c/c)$ liefert
  $8c^2xy = (x^2+y^2)^2$,

  also insbesondere für $c^2 = \frac{1}{8}$:

  $\boxed{xy = (x^2+y^2)^2}$

- Begründe die Symmetrien rechnerisch.

Übungsblatt: Schnittprobleme

- $P(x/y)$ sei ein Punkt auf der Lemniskate $2(x^2 - y^2) = (x^2+y^2)^2$.

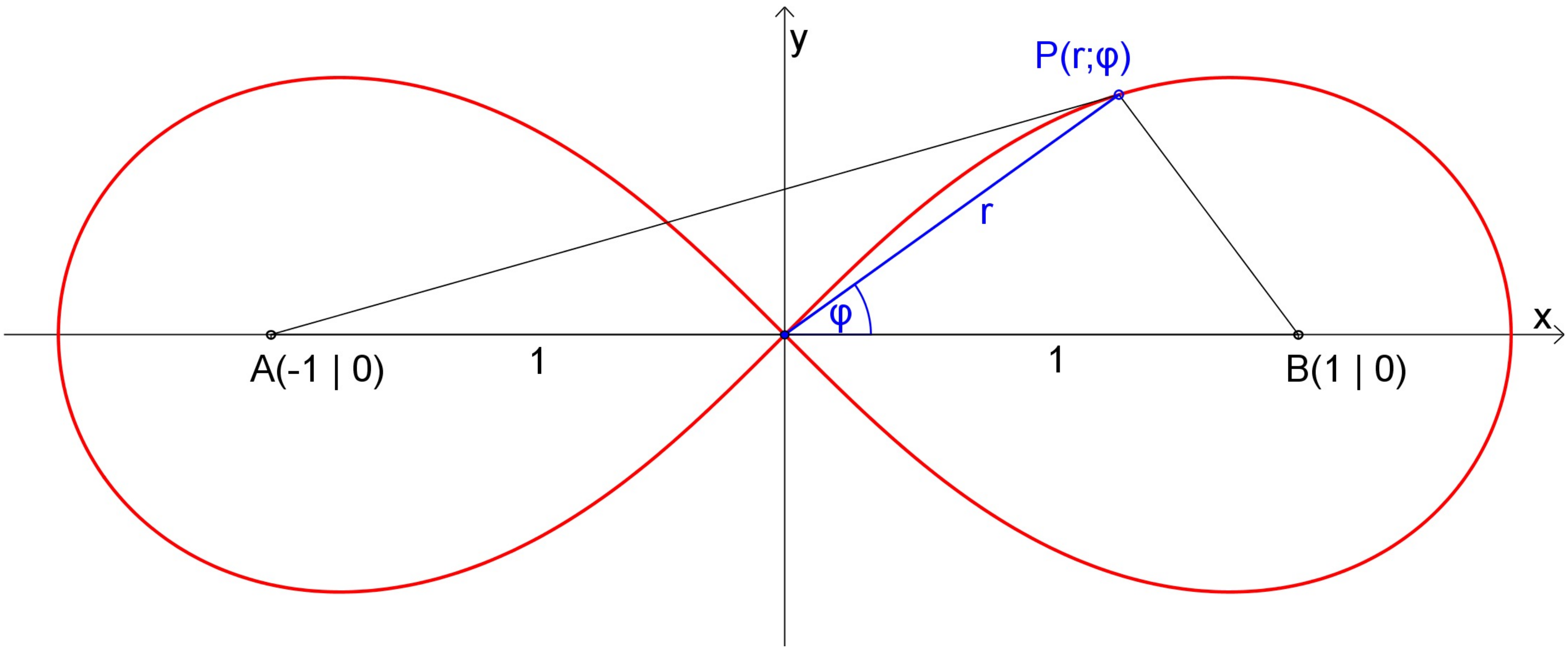
  Berechne y, falls $x = 1$.
  (→Biquadratische Gleichung)

  Für welche y-Werte wird die Diskriminante der Lemniskatengleichung null?
  (→Extremalpunkte)

Verschiebungen, Streckungen bezüglich den Koordinatenachsen

III. Polarformen

Gesucht sind die Polarkoordinaten der Punkte $P(r;\varphi)$, welche die Bedingung $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ erfüllen.



Mit Hilfe des Cosinussatzes erhalten wir:

$$1 = \overline{AP} \cdot \overline{BP}$$
$$= \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180° - \varphi)} \cdot \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

Bringen Sie diese Gleichung auf eine einfache Form.

$$1 = \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180° - \varphi)} \cdot \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

$$1 = \sqrt{1 + r^2 + 2rcos(\varphi)} \cdot \sqrt{1 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

$$1 = (1 + r^2)^2 - (2rcos(\varphi))^2 = 1 + 2r^2 + r^4 - 4r^2cos^2(\varphi)$$

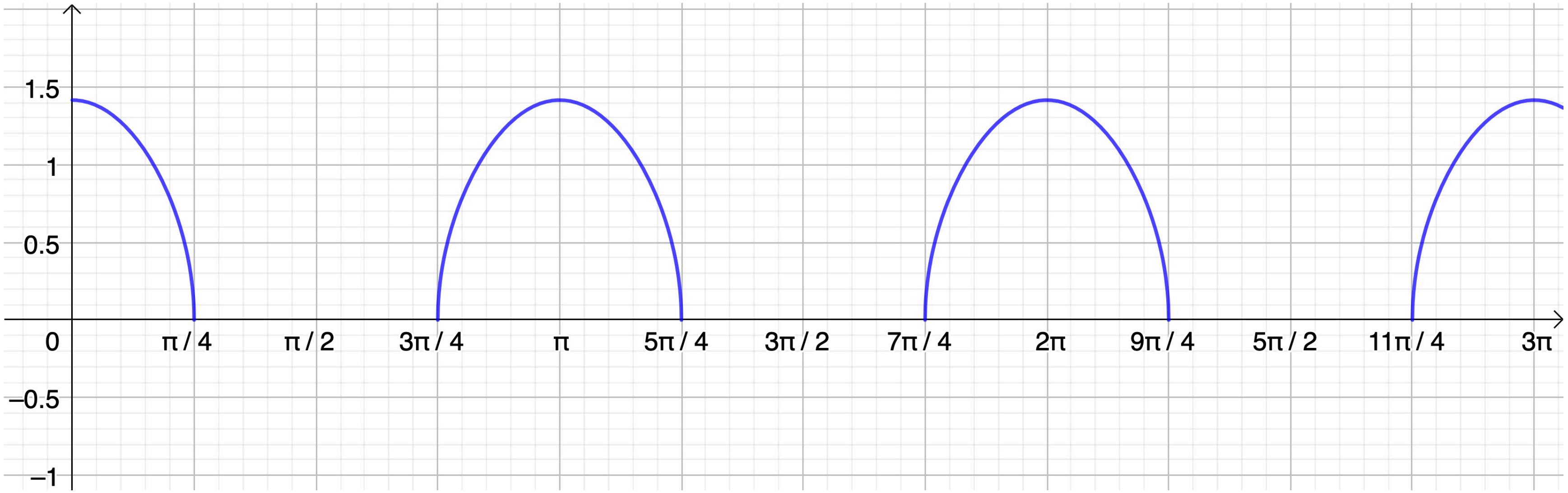
$$0 = 2r^2 + r^4 - 4r^2cos^2(\varphi) = r^2(r^2 + 2 - 4cos^2(\varphi))$$

liefert $r = 0$ oder aber $r^2 = 4cos^2(\varphi) - 2 = 2 \cdot \cos(2\varphi)$

Die Polarform der BL ist somit: $\boxed{r(\varphi) = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}}$

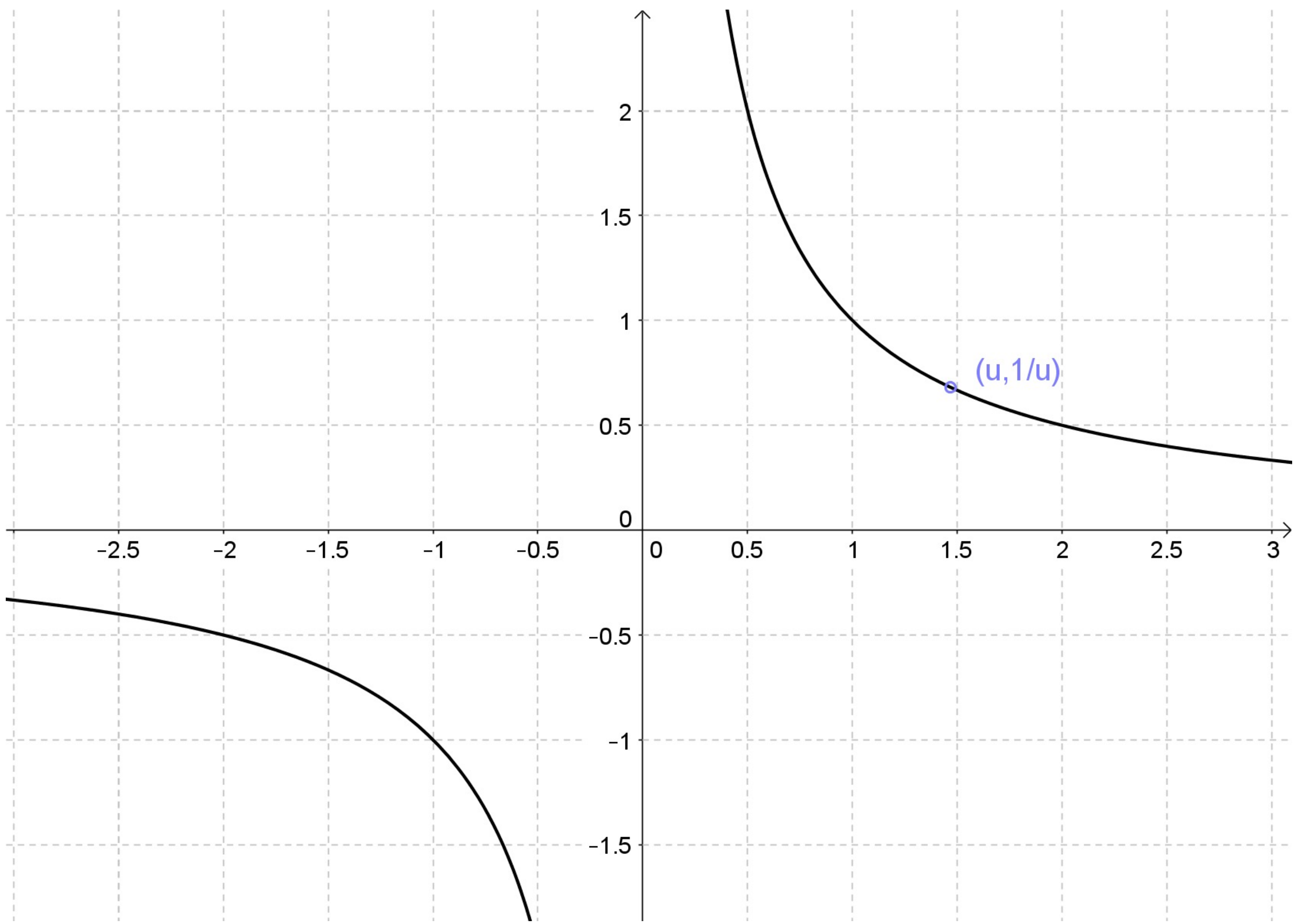
Bemerkung:

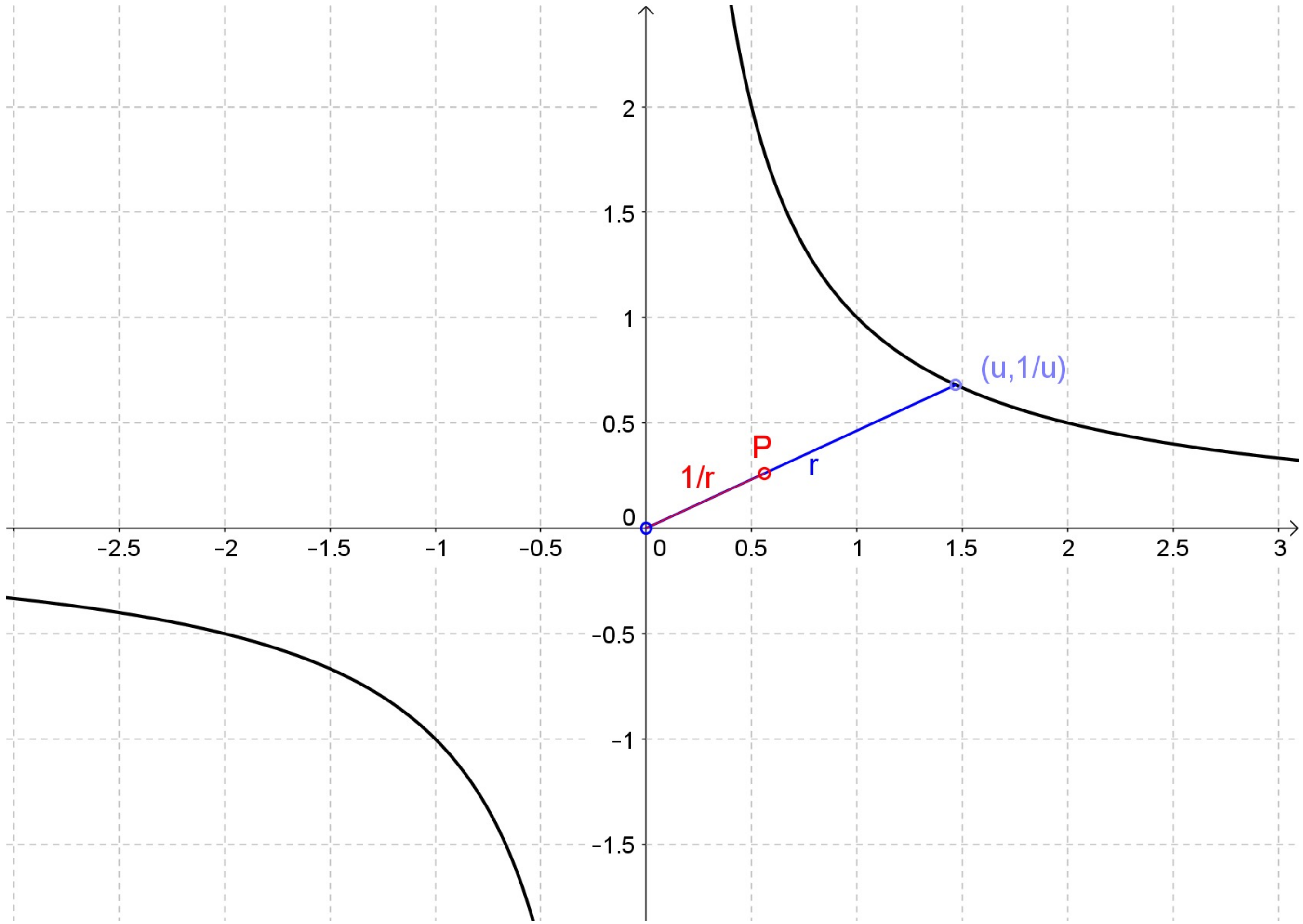
Die entsprechende Funktion $y = f(x) = \sqrt{2 \cdot cos(2x)}$ besitzt folgenden Graphen:



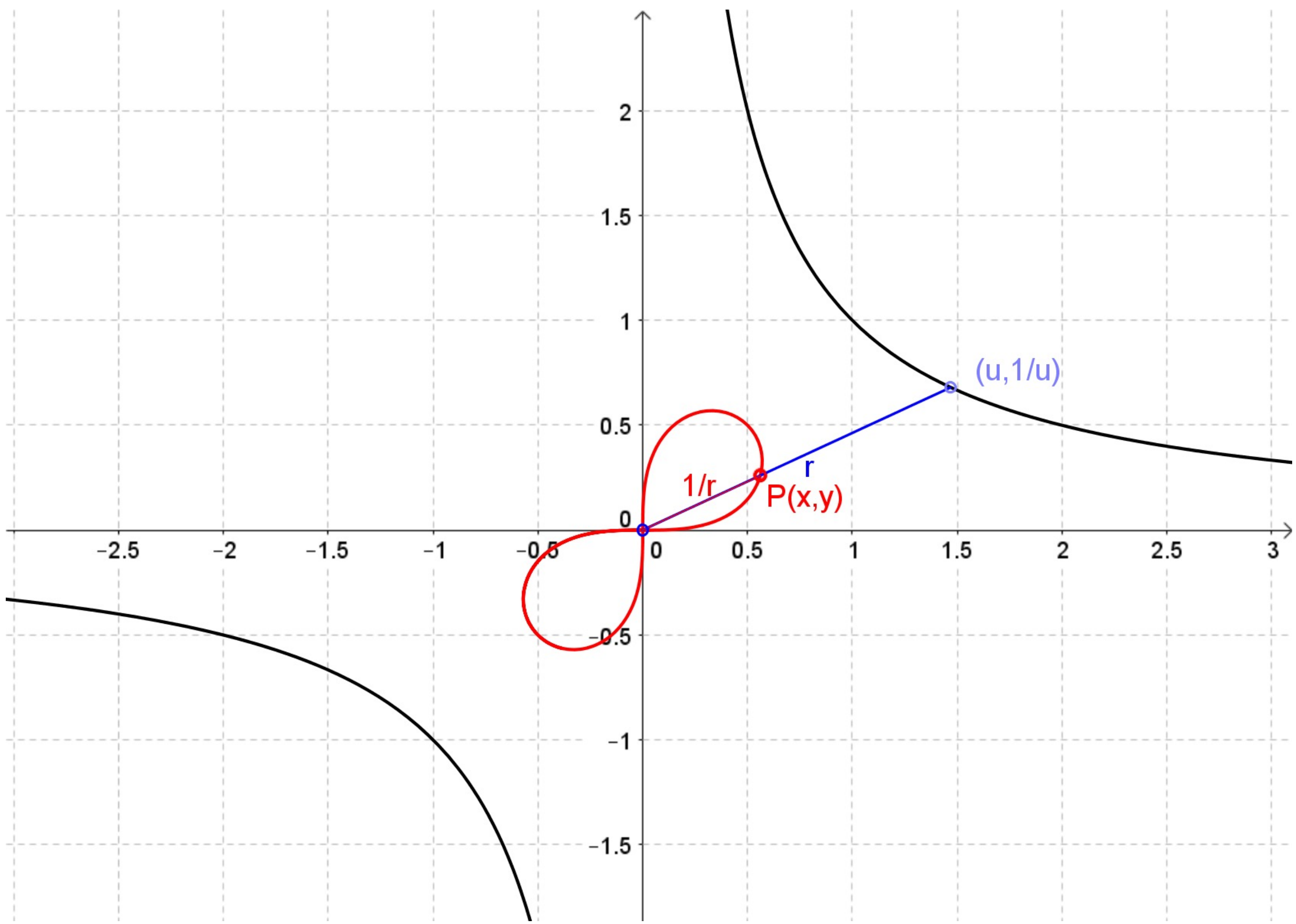
Übungslatt: Polarformen

„Kehrwerte von Kehrwerten“





2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
(u,1/u)
P
1/r
r



2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
(u,1/u)
r
1/r
P(x,y)

Berechnung:

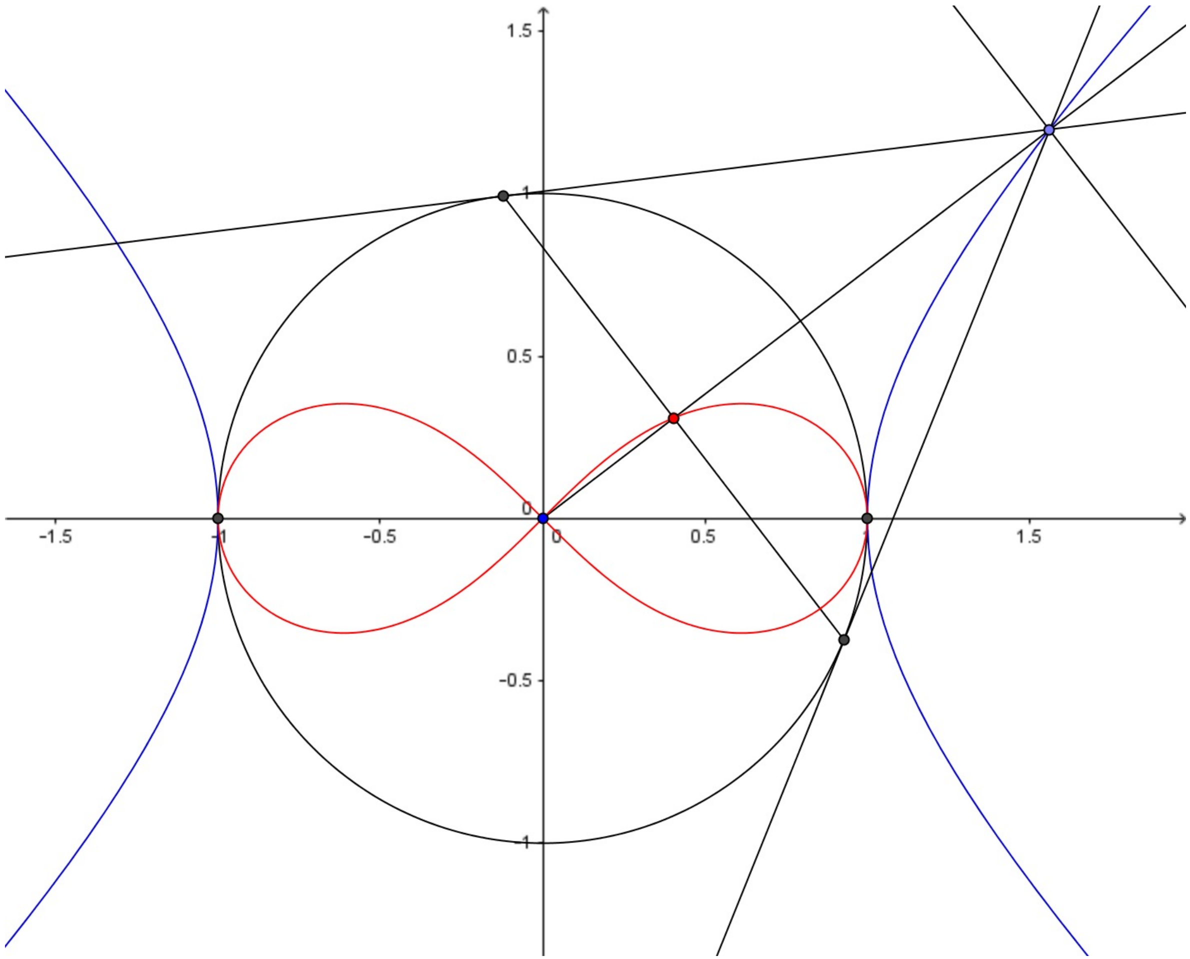
$$r = \sqrt{u^2 + \frac{1}{u^2}} = \sqrt{\frac{u^4 + 1}{u^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{u^2}{u^4 + 1}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mit $\frac{x}{y} = \frac{u}{{}^1/_u} = u^2$ folgt $\frac{{}^x/_y}{({}^x/_y)^2+1} = x^2 + y^2$.

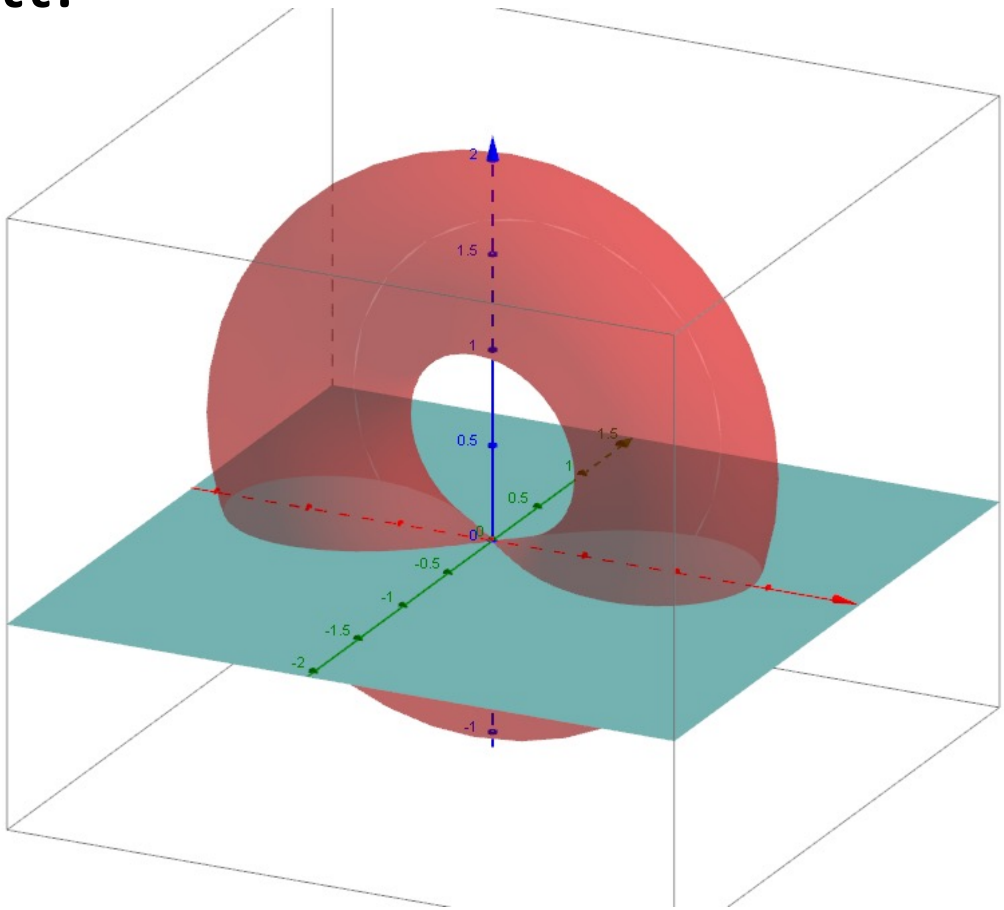
Also $x^2 + y^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \;\Longrightarrow (x^2 + y^2)^2 = xy$ BL!

Invertiert man eine gleichschenklige Hyperbel an einem Zentralkreis, so entsteht eine BL.



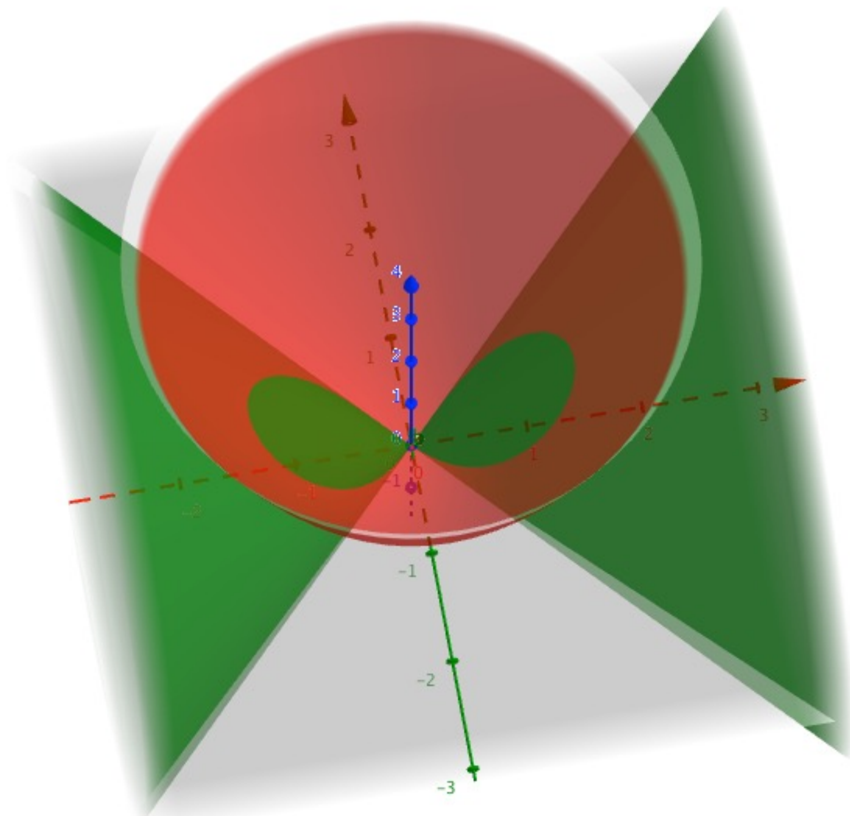
IV Allerlei

Torusschnitt:

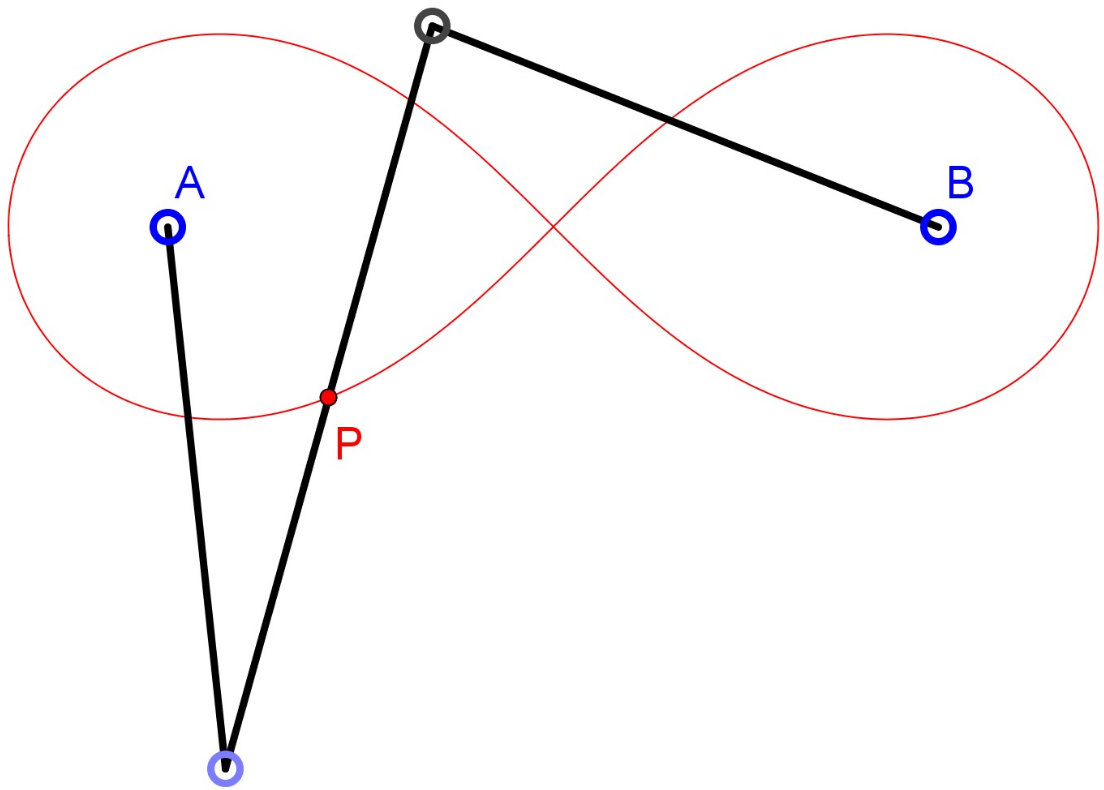


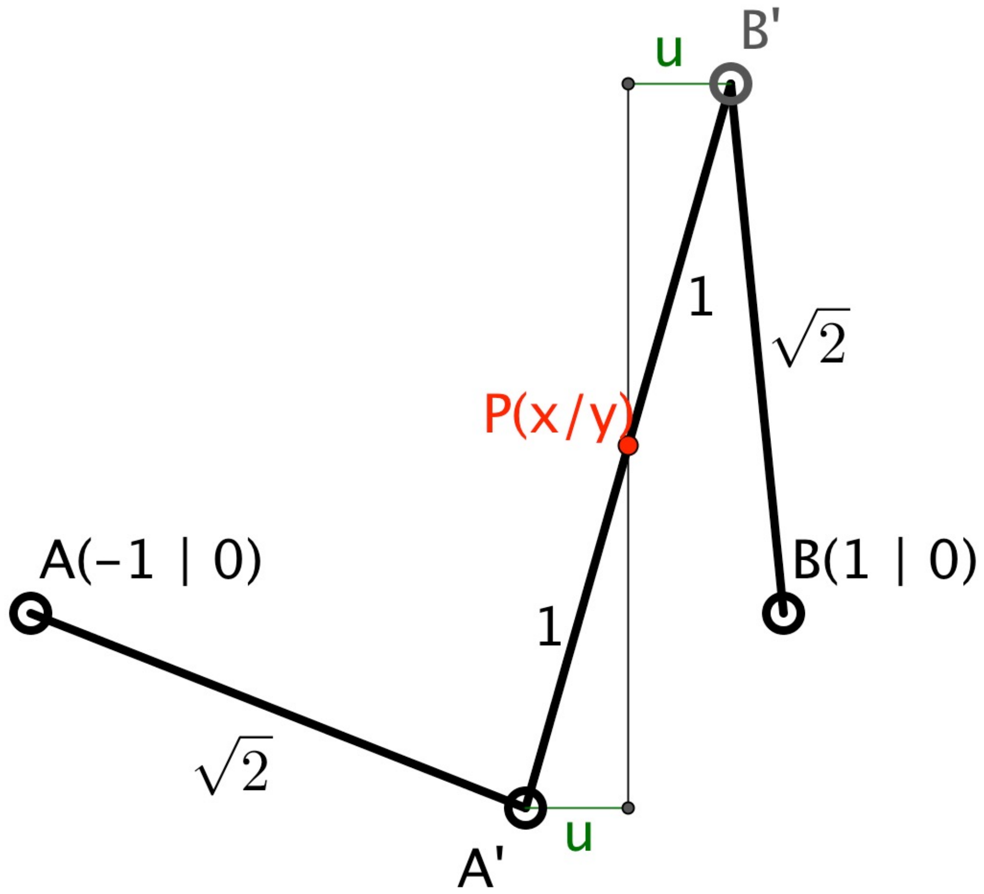
Kegel $z^2 = x^2 - y^2$

mit Paraboloid $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + y^2)$ schneiden:



Mechanische Konstruktion einer BL

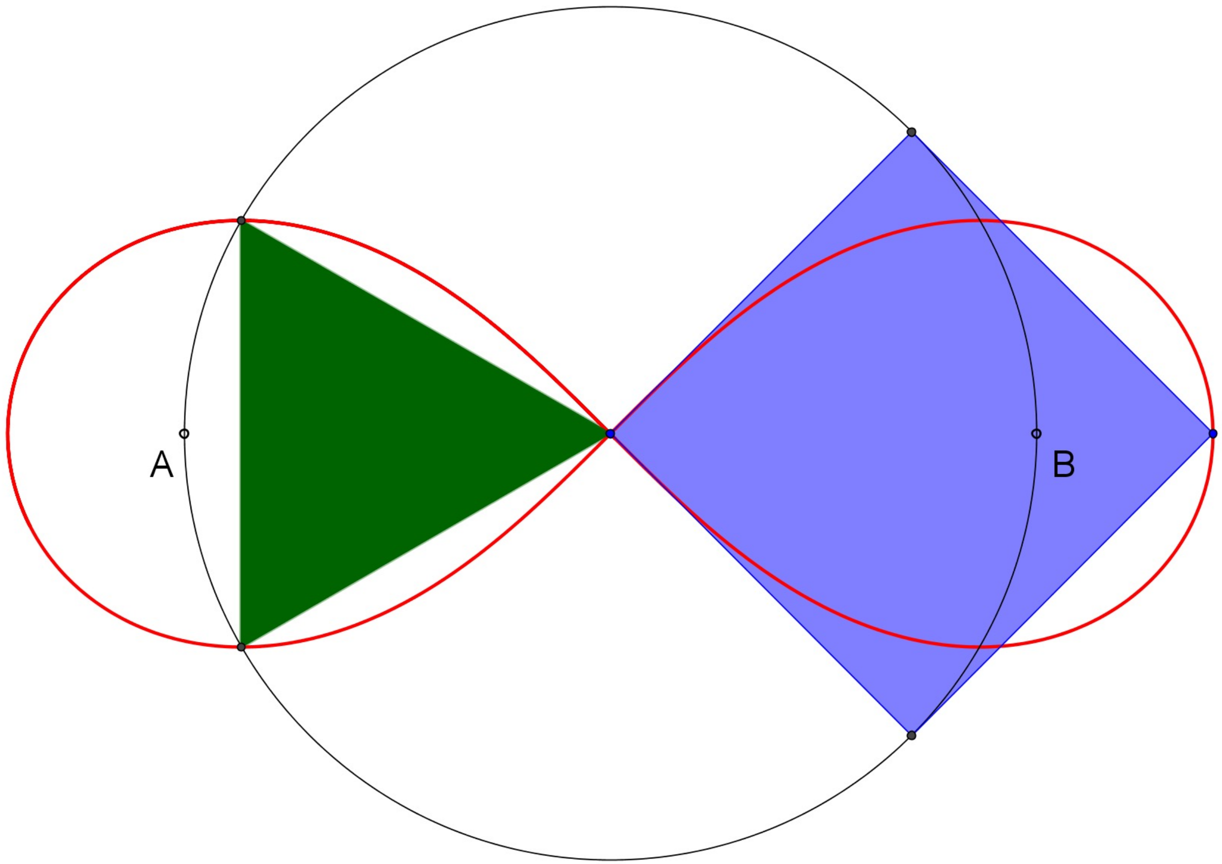




Aus $A'(x - u/y - \sqrt{1-u^2})$, $B'(x + u/y + \sqrt{1-u^2})$, $\overline{AA'} = \sqrt{2}$ und $\overline{BB'} = \sqrt{2}$, folgt durch Elimination von u die BL-Gleichung $2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$.

Diverse Eigenschaften einer BL

Kreis, gleichseitiges Dreieck, Quadrat



Analysis

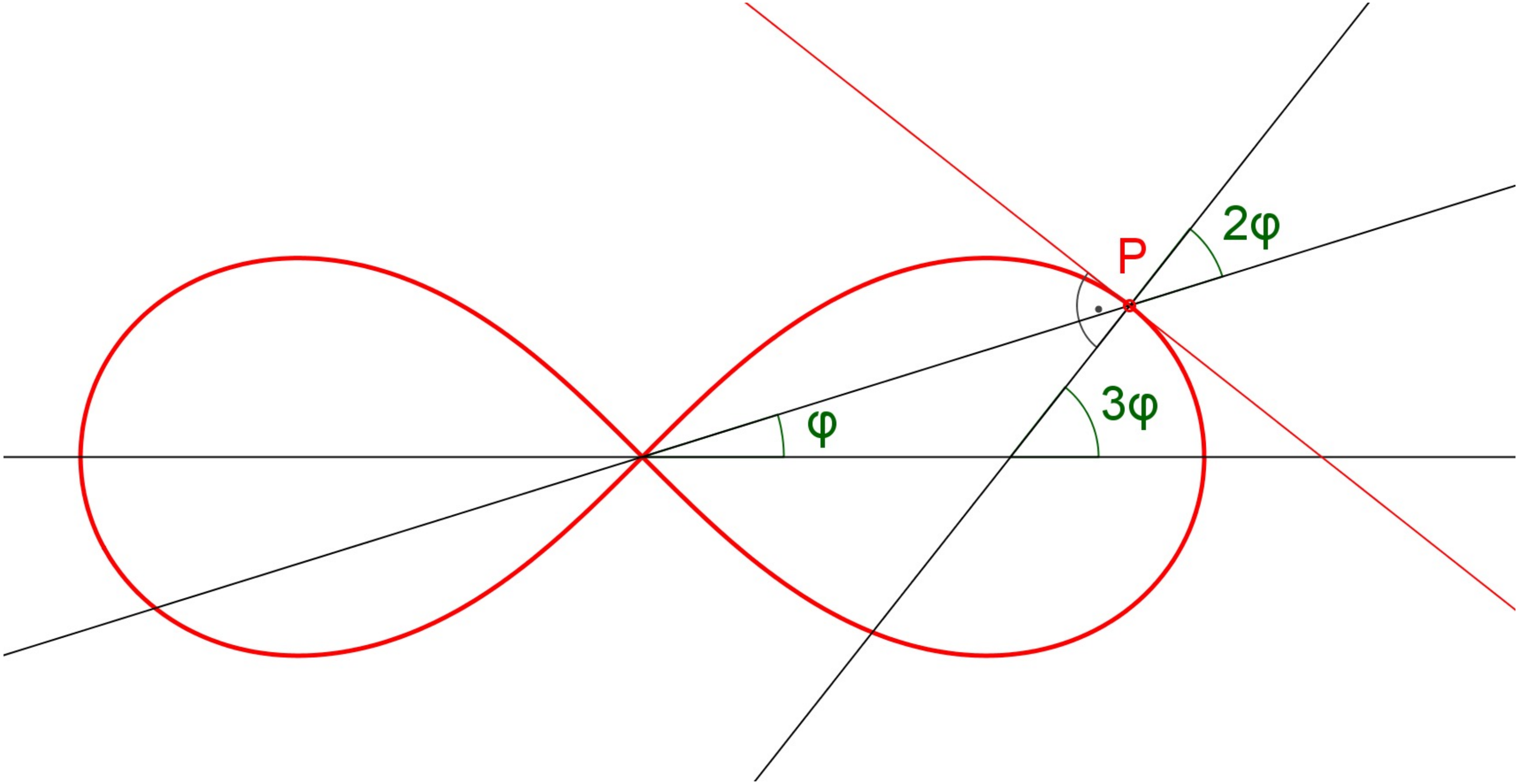
- gleichseitiges Dreieck:

  $E(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}/\pm\frac{1}{2})$ sind die Extremalpunkte.
  (→Übung vorne oder mit partiellen Ableitungen)

- Der Quadratflächeninhalt entspricht dem Inhalt der halben BL:

$$2\cdot\int_0^{\pi/4}\frac{r^2}{2}d\varphi=\int_0^{\pi/4}2\cos(2\varphi)\,d\varphi=[\sin(2\varphi)]_0^{\pi/4}$$
$$=\sin(\pi/2)=1$$

Winkeleigenschaft:



Spezialfall: Für φ = 30° ist P ein Hochpunkt.

Parameterdarstellung der BL (vgl. Polarform):

$$\vec{p}(t) = \sqrt{2\cos(2t)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Der Tangentenvektor

$$\dot{\vec{p}}(t) = \cdots = \frac{-2}{\sqrt{2\cos(2t)}} \cdot \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}$$

steht senkrecht zu $\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$!

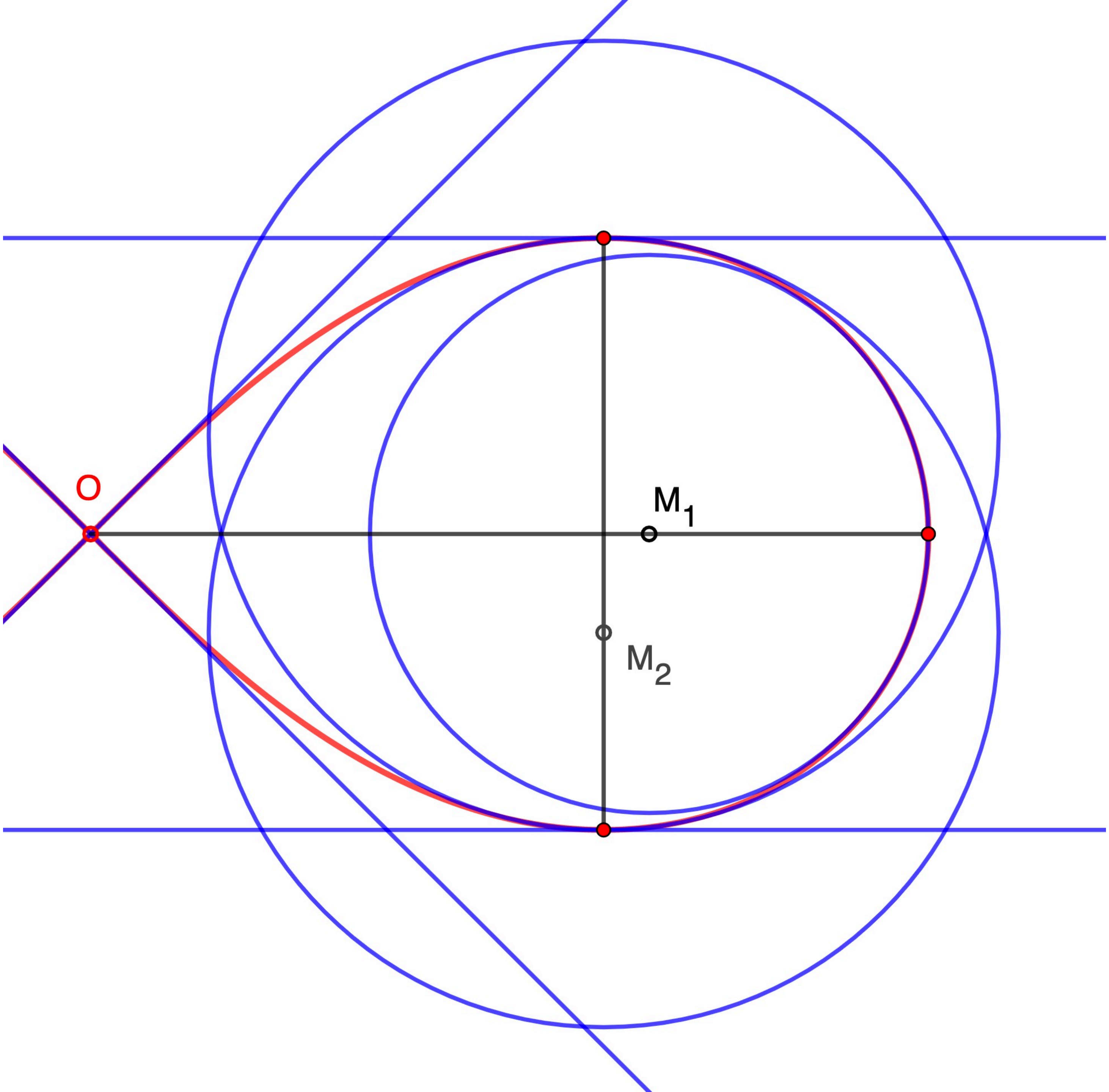
Krümmungskreise der BL $2(x^2 - y^2) = (x^2+y^2)^2$

- Für den Scheitelpunkt rechts ist

$$M_1(\tfrac{2}{3}\sqrt{2}/0) \text{ und } r_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

- Für den Hochpunkt rechts ist

$$M_2(\frac{\sqrt{3}}{2}/-\frac{1}{6}) \text{ und } r_2 = \frac{2}{3}.$$


O
M1
M2

Literatur

- Dörte Haftendorn, Kurven erkunden und verstehen, Springer Spektrum
- Juan Läuchli, Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht, VSMP Bulletin Nr. 142, S. 6-11
- Hans Schupp, Einige Thesen zur sogenannten Kurvendiskussion, MU, Heft 4/5, Sept. 1998, S. 5-21
- Hans Walser, Die Acht in der Kugel, MU, Heft 4, Aug. 2018, S. 50-55