Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht

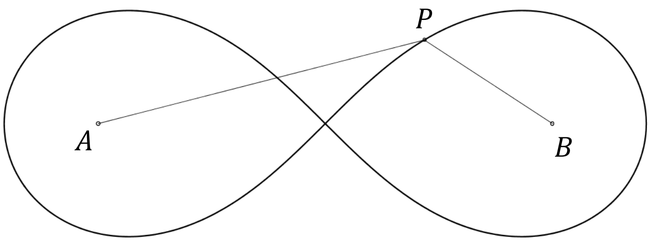
Juan Läuchli, Kantonsschule Frauenfeld, juan.laeuchli@kftg.ch

Um die üblichen Lehrplaninhalte zu vertiefen ist es wünschenswert, den Lernstoff mit kurzen Ausblicken zu erweitern. Die faszinierende Bernoulli'sche Lemniskate bietet auch für das Grundlagenfach Mathematik einige Anknüpfungsmöglichkeiten. In diesem Artikel geht es darum, wie und in welchen Zusammenhängen man diese schöne Kurve im Mittelschulunterricht einsetzen könnte. Siehe dazu auch [1].

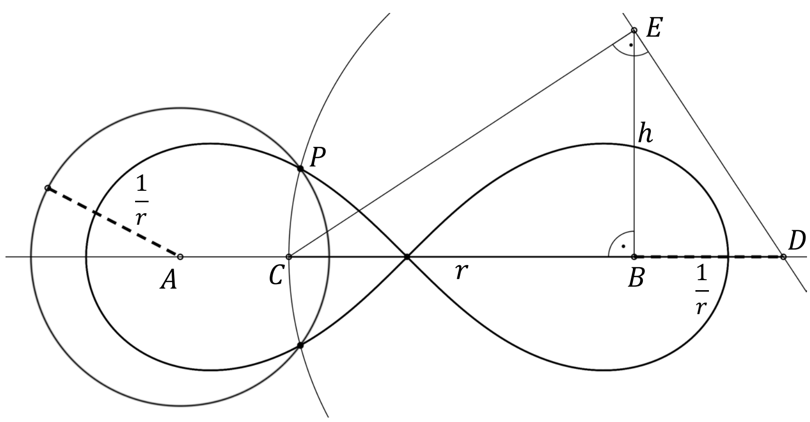
1 Die Bernoulli'sche Lemniskate als geometrischer Ort

Wir betrachten zwei feste Punkte A und B. Der geometrische Ort aller Punkte P, mit $\overline{AP}:\overline{BP} = 1$, ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Gilt $\overline{AP}:\overline{BP} = k,\ k \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, so ist der geometrische Ort für P ein Apolloniuskreis. Die Bedingung, dass die Summe $\overline{AP} + \overline{BP} = k$ konstant bleibt, führt zu einer Ellipse, und mit der Differenz $\overline{AP} - \overline{BP} = k$ erhält man einen Hyperbelast. Mit dynamischer Software ist es auch für die Schüler einfach, solche geometrischen Örter zu erforschen. (In diesem Artikel wurden sämtliche Figuren mit GeoGebra erstellt.)

Wird nun das Produkt $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = k$ konstant gehalten, so ist der geometrische Ort aller Punkte P eine Cassinische Kurve. Ein Spezialfall davon ist die in diesem Artikel behandelte Bernoulli'sche Lemniskate. Bei ihr wird die Konstante k abhängig vom Abstand der Punkte A und B gerade so gewählt, dass der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ diese Bedingung erfüllt. Ist z.B. der Abstand $\overline{AB} = 2$, so muss $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ gelten. Unten wird der geometrische Ort dieser Punkte P dargestellt.



Solche Punkte P können z.B. folgendermassen konstruiert werden: Von B aus wird ein beliebiger Radius $r = \overline{BC}$ abgetragen. Wird die Länge der Höhe $h = \overline{BE}$ im rechtwinkligen Dreieck CDE 1 gewählt, so gilt nach dem Höhensatz $\overline{BD} = \frac{1}{r}$. P ist Schnittpunkt der Kreise um B mit Radius r und um A mit Radius $\frac{1}{r}$.

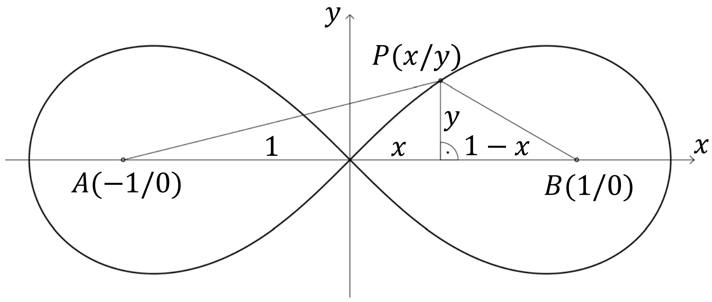


2 Gleichungen einer Bernoulli'schen Lemniskate

Koordinatenformen

Sobald die Abstandsformel zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem eingeführt wurde, z.B. im Zusammenhang mit den Kreisgleichungen, kann die Koordinatenform der Bernoulli'schen Lemniskate hergeleitet werden. Im wie unten eingefügten Koordinatensystem gilt die Gleichung:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \sqrt{(1+x)^2+y^2} \cdot \sqrt{(1-x)^2+y^2} = 1$$



Obige Gleichung kann als Algebraübung auf die hübsche Form $2(x^2-y^2)=(x^2+y^2)^2$ gebracht werden.

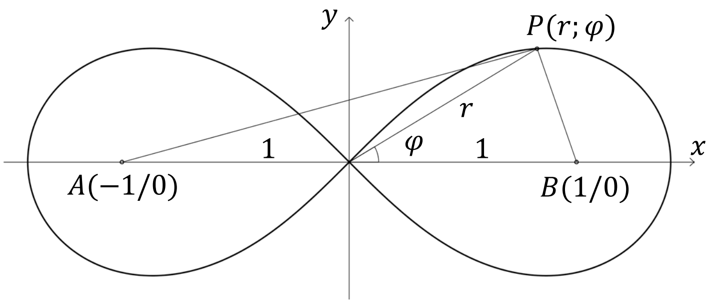
Falls man von den Punkten $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ ausgeht, so muss $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$ gelten. Wie gefordert erfüllt dann auch der Mittelpunkt $P(0/0)$ von $\overline{AB}$ diese Bedingung. Die zugehörige Lemniskatengleichung $2c^2(x^2-y^2)=(x^2+y^2)^2$ erhält man wiederum mit Pythagoras.

Für die Ausgangspunkte $A(-c/-c)$ und $B(c/c)$ erhält man mit $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 2c^2$ die zugehörige Gleichung $8c^2xy=(x^2+y^2)^2$, und im Speziellen für $c^2=\frac{1}{8}$ die einfache Form $xy=(x^2+y^2)^2$. Hier sind die Symmetrieachsen die Diagonalen $y=\pm x$.

Solche Symmetrien kann man direkt in den verschiedenen obigen Gleichungen ablesen. Ein weiteres Übungsfeld zur ersten Gleichung $2(x^2-y^2)=(x^2+y^2)^2$ ist das Ausrechnen der Koordinaten konkreter Lemniskatenpunkte. Das Fixieren einer Koordinate führt zu biquadratischen Gleichungen. Die Extremalpunkte $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}/\pm\frac{1}{2}\right)$ erhält man, indem die entsprechende Diskriminante für festes y null wird. Dies sind alles bereichernde Algebraübungen.

Polarformen

Auch später in der Trigonometrie gibt unsere Lemniskate einiges her. Wir suchen die Polarkoordinaten der Punkte $P(r;\varphi)$, welche unsere Bedingung $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 1$ erfüllen.



Mit Hilfe einiger trigonometrischer Kenntnisse (Cosinussatz, Doppelwinkelformel,…) formen wir nun um:

$$1 = \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(180° - \varphi)} \cdot \sqrt{1^2 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

$$1 = \sqrt{1 + r^2 + 2rcos(\varphi)} \cdot \sqrt{1 + r^2 - 2rcos(\varphi)}$$

Daraus folgt $1^2 = (1 + r^2)^2 - (2rcos(\varphi))^2 = 1 + 2r^2 + r^4 - 4r^2cos^2(\varphi)$

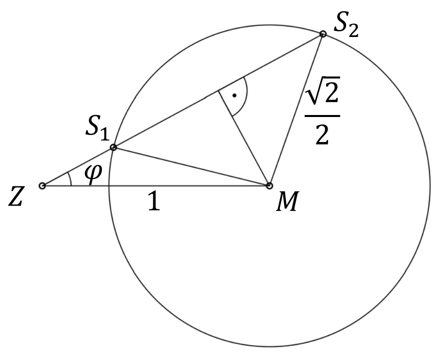
und somit $0 = r^2(2 + r^2 - 4cos^2(\varphi))$.

Entweder ist also $r = 0$ oder aber $r^2 = 4cos^2(\varphi) - 2 = 2 \cdot \cos(2\varphi)$.

Die Polarform unserer Kurve ist somit $r(\varphi) = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$.

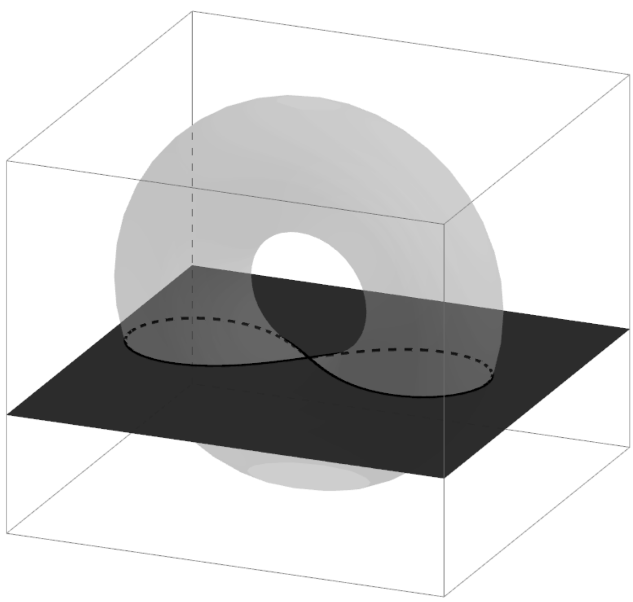
Falls man von den Punkten $A(-c/0)$ und $B(c/0)$ und $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$ ausgeht, erhält man $r(\varphi) = c \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$ und speziell für $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ die einfachste Form $r(\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)}$.

In folgender Figur ist der Kreisradius $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und der Abstand von Z zum Kreismittelpunkt M gleich 1. Für beliebiges φ wird die Sehnenlänge $\overline{S_1S_2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - sin^2(\varphi)} = \sqrt{2(1 - 2sin^2(\varphi))} = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$. Dies entspricht obigem $r(\varphi)$, und gibt uns somit eine neue Konstruktionsmöglichkeit für eine Lemniskate.



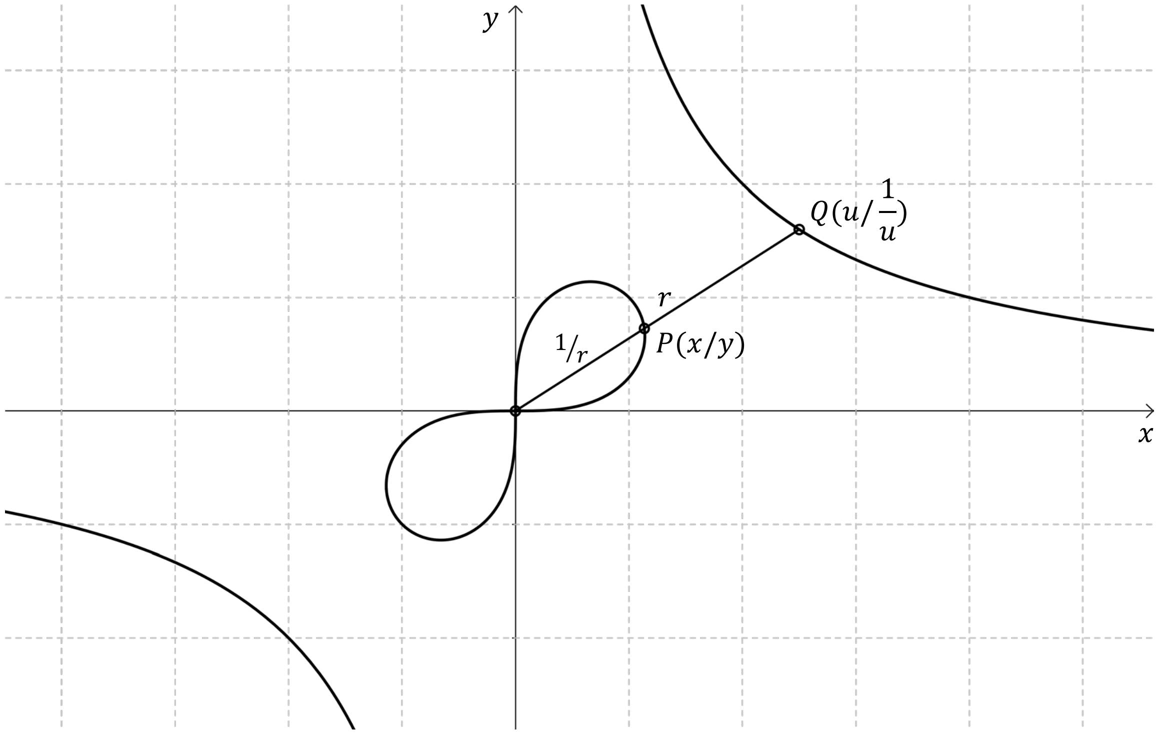
3 Die Bernoulli'sche Lemniskate als Schnittfigur

Schneidet man einen Torus mit einer Ebene, so erhält man in der unten abgebildeten Situation eine Lemniskate als Schnittfigur. (Wie die auftretenden Kreisradien gewählt werden müssen, damit man genau eine Bernoulli'sche Lemniskate erhält, wird hier nicht weiter ausgeführt.)



4 "Kehrwerte von Kehrwerten"

Wird im kartesischen Koordinatensystem zu jedem x-Wert u der Kehrwert $\frac{1}{u}$ ausgerechnet und als Punkt $Q\left(u/\frac{1}{u}\right)$ eingezeichnet, so liegt dieser bekanntlich auf der Hyperbel mit der Gleichung $y=\frac{1}{x}$. Nun betrachten wir Q in Polarkoordinaten $Q(r;\varphi)$. Vom Abstand r zum Ursprung nehmen wir nun wiederum den Kehrwert $\frac{1}{r}$ und zeichnen den Punkt $P\left(\frac{1}{r};\varphi\right)$ ein. Wie unten gezeigt wird, liegt dieser Punkt $P(x/y)$ dann immer auf einer Bernoulli'schen Lemniskate.



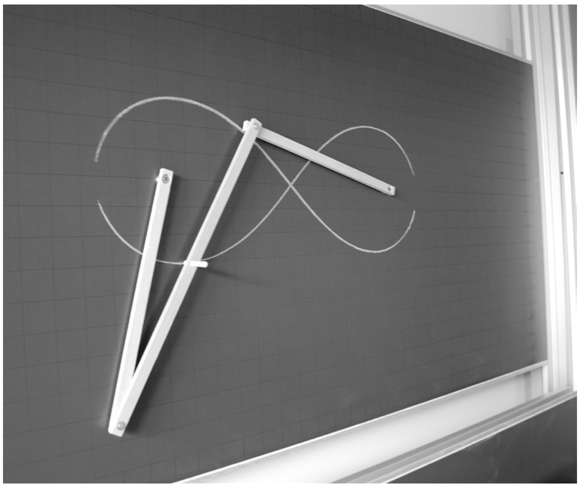
Nach Pythagoras gelten $r^2=u^2+\frac{1}{u^2}$ und $\frac{1}{r^2}=x^2+y^2$. Nach dem Strahlensatz gilt zudem $\frac{x}{y}=\frac{u}{1/u}=u^2$. Daraus folgert man $x^2+y^2=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{u^2+\frac{1}{u^2}}=\frac{u^2}{u^4+1}=\frac{x/y}{(x/y)^2+1}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Multiplizieren wir mit dem Nenner, so erhalten wir $(x^2+y^2)^2=xy$, was nach dem 2. Abschnitt bekanntlich die Gleichung einer Lemniskate ist.

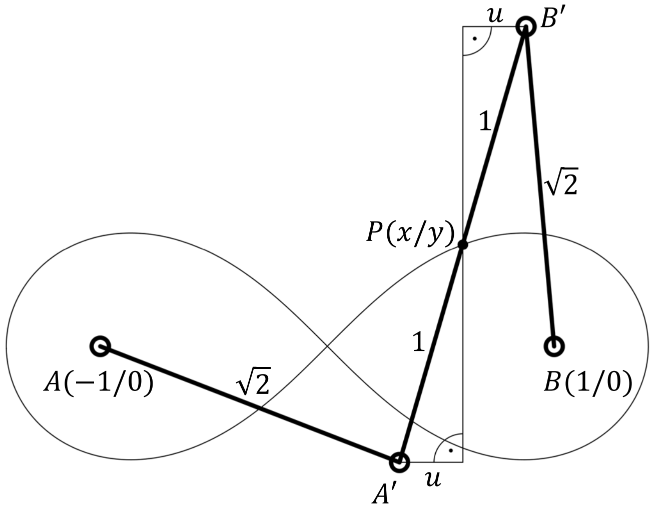
Die Koordinatenachsen sind die Asymptoten der Hyperbel und werden so gleichzeitig auch zu Tangenten der Lemniskate im Ursprung. Die Tangenten im Selbstdurchdringungspunkt einer Lemniskate stehen somit immer senkrecht aufeinander.

Obiger Beweis zeigt in anderen Worten, dass unsere gleichschenklige Hyperbel bei einer Inversion am Einheitskreis auf eine Bernoulli'sche Lemniskate abgebildet wird. Falls die Inversion am Kreis oder gar die komplexe Kehrfunktion $f(z)=\frac{1}{z}$ im Unterricht behandelt werden, so hat man natürlich auch andere Mittel, obige Beziehung zwischen Hyperbel und Lemniskate darzulegen.

5 Mechanische Konstruktion einer Bernoulli'schen Lemniskate

Auch mit einem mechanischen Modell kann die Bernoulli'sche Lemniskate erhalten werden. Dieses wird übrigens bei Fahrgestellen von Eisenbahnwagen als Lemniskatenlenkung verwendet.

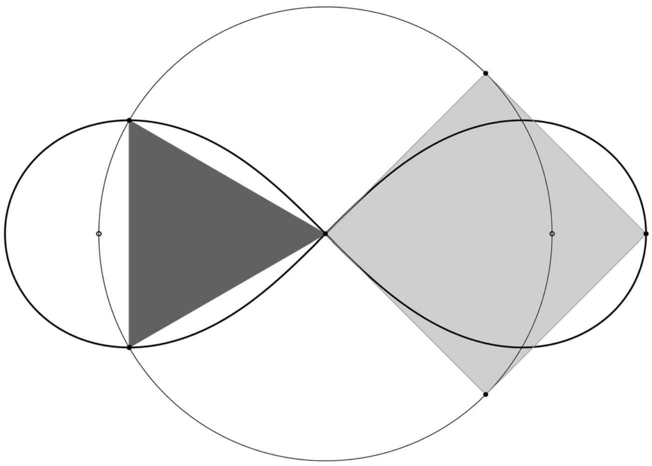




An die festen Aufhängepunkte A und B mit Abstand 2 werden gemäss obiger Figur drehbar drei Stäbe der Längen $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \sqrt{2}$ und $\overline{A'B'} = 2$ montiert. Der Mittelpunkt P des Stabes $\overline{A'B'}$ durchläuft dann eine Bernoulli'sche Lemniskate, denn aus $A'(x - u/y - \sqrt{1-u^2})$ und $B'(x + u/y + \sqrt{1-u^2})$ folgt mit $\overline{AA'} = \sqrt{2}$ und $\overline{BB'} = \sqrt{2}$ durch Elimination von u unsere bekannte Gleichung $2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$.

6 Diverse Eigenschaften einer Bernoulli'schen Lemniskate

Kreis, gleichseitiges Dreieck, Quadrat

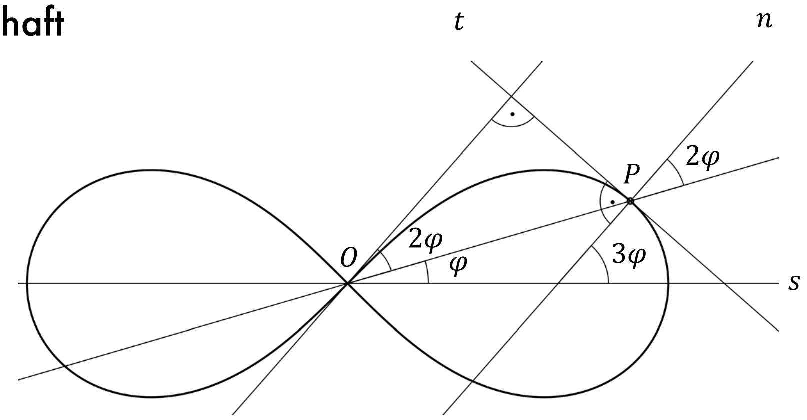


Der zentrale Einheitskreis schneidet die Lemniskate gerade in den Hoch- respektive Tiefpunkten. Wie auf der linken Seite dargestellt, entsteht so mit dem Ursprung zusammen ein gleichseitiges Dreieck. Dies folgt direkt aus den Koordinaten der Extremalpunkte $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}/\pm\frac{1}{2}\right)$. Vergleiche dazu Abschnitt 2.

Das auf der rechten Seite abgebildete Quadrat passt auch in ganz natürlicher Weise in die Lemniskate:

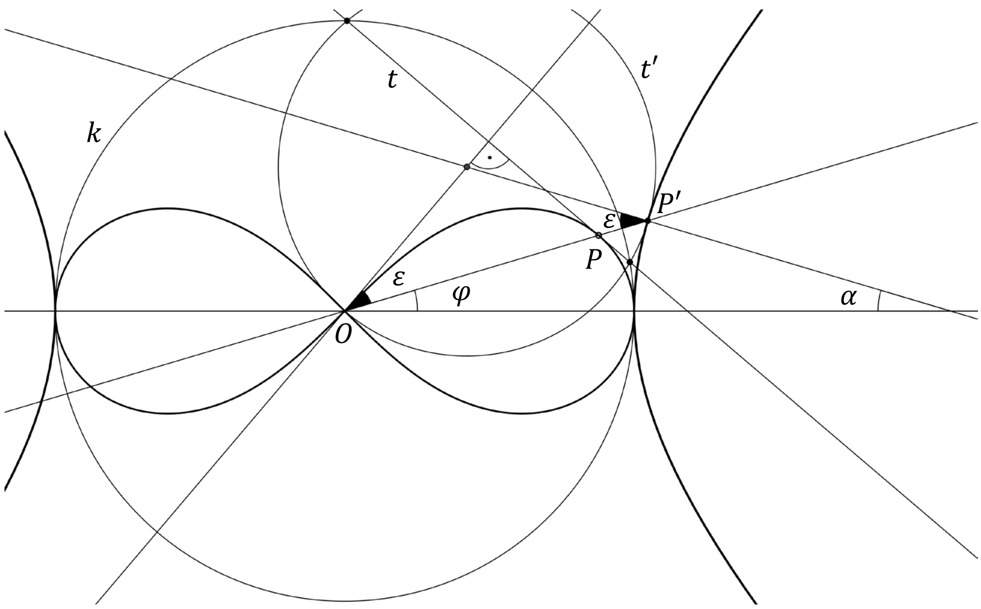
Zwei Quadratseiten sind gerade Tangenten der Lemniskate im Ursprung, was wir in Abschnitt 4 gezeigt haben. Mit der Quadratseitenlänge 1 liegen zwei Eckpunkte auf unserem Einheitskreis und $(\sqrt{2}/0)$ wird zur Quadratecke ganz rechts. Diese liegt auf der Lemniskate, wie man sich leicht durch Einsetzen in ihre Gleichung überzeugen kann. Mit Hilfe der Integralrechnung kann man zudem zeigen, dass der Quadratflächeninhalt gerade dem Inhalt der rechten Lemniskatenschlaufe entspricht.

Winkeleigenschaft



Für einen beliebigen Lemniskatenpunkt P gilt: Der Winkel φ zwischen der Symmetrieachse s und OP erscheint wie in der Figur abgebildet verdoppelt respektive verdreifacht. n ist dabei die Kurvennormale in P.

Dies kann direkt mit Hilfe impliziter Differentiation gezeigt werden. Eine andere elegante Beweisidee ist, zuerst die Lemniskate samt Tangente t an k zu invertieren. Das Bild von t ist ein Kreis t' durch den Ursprung O, welcher die Hyperbel $x^2 - y^2 = c$ im Punkt P' berührt. In der Figur unten bleibt nur noch zu zeigen, dass $\varepsilon = 2\varphi$ ist. Dies ist dann der Fall, wenn $\alpha = \varphi$. Dazu berechnen wir in $P'(x_0/y_0)$ die Steigung der Normalen. Die Ableitung von $y = f(x) = \sqrt{x^2 - c}$ ist $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-c}} = \frac{x}{y}$ und somit die gesuchte Normalensteigung $-\frac{y_0}{x_0}$. Dies entspricht der negativen Steigung von OP' und damit gilt $\alpha = \varphi$.



Literatur

[1] Hans Schupp: Einige Thesen zur sogenannten Kurvendiskussion, MU, Heft 4/5, Sept. 1998