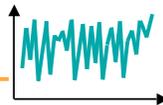


# Mathematik & Lebenswissenschaften

- eine moderne Kombination,  
die sich in der Schule nutzen lässt

**Barbara Hellriegel**  
Anthropologisches Institut & Museum  
Universität Zürich

## Mathematik ist überall!



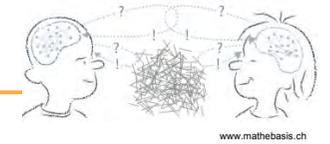
Die Mathematik ist nicht so "losgelöst vom allem" und unnahbar

- wie die Leute meinen
- wie sie sich zum Teil selbst präsentiert

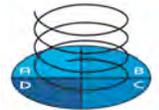
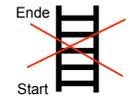
-> Das ist eine Chance, die sich für die Schule nutzen lässt

www.du-kannst-mathe.de

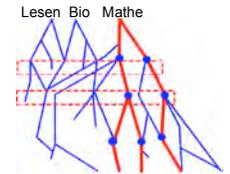
## Lernen heisst Vernetzen



- neurologische Verknüpfungen im Gehirn bilden
  - an das anknüpfen, was man schon weiss
- zentrale Annahmen über Lernen (Neurophysiologie):
- aktiver, selbstbezoglicher und individueller Prozess
  - knüpft bei persönlichen Vorerfahrungen an
  - erzeugt ein sich mehr und mehr erweiterndes Netz an Know-how



- Verbindungen zwischen Fachgebieten herstellen
- sich mit anderen über Gelerntes austauschen



## Überblick

- Beispiele für mögliche Kurs-Formen  
Aufbau und Ergebnisse
- Motivation, Ideen, Herangehensweisen  
Einstieg, Beispiele und verblüffende Parallelen
- Umsetzung am Computer  
STELLA, vergleichbare Freeware und Excel

## Einführung i. d. evolutions- u. populations-ökolog. Modellierung

### Kurs-Formen

- als Teil des **Ökologie-Kurses** (fortgeschr. Studierende):  
3 Vorlesungstermine + 1 Praktikumstag
- **3-tägige Fortbildungsveranstaltung** (Doktorierende, Postdocs)  
3 Vorlesungen von 3 Dozenten/in + eigenes / Wahl-Projekt
- **1-wöchiger Blockkurs** (fortgeschr. Stud., Doktorierende, PD, Assist.-Prof)  
3 Vorlesungen + Artikel-Diskussion + eigenes Projekt



Prof. Barbara Hellriegel 5

## Lernziele des Kurses

- **Vorlesungen:**
  - Einführen in die Verwendung mathemat. Modelle i. d. Biologie
  - Interesse wecken für die Stärken mathematischer Herangehensweisen
- **Artikel-Diskussion:**
  - Eigenständiges Erarbeiten eines theoretischen Artikels
  - die Formeln lesen lernen (Mathematik als exakte Sprache)
- **Projektarbeit:**
  - Interessante u. sinnvolle Fragestellung präzise formulieren
  - Umsetzung der Fragestellung in ein geeignetes Modell
  - Exploration des Modells und Interpretation seiner Ergebnisse
- **Vortrag:**
  - Klare Präsentation des Modells und Diskussion seiner Ergebnisse

Pluspunkte: Selbständigkeit, Originalität, Analytische Resultate

Prof. Barbara Hellriegel 7

## Block-Kurs: Einführung i. d. evolutions- u. populations-ökolog. Modellierung

|       | Mo 6.9.           | Di 7.9.                       | Mi 8.9.                 | Do 9.9.                    | Fr 10.9.              |
|-------|-------------------|-------------------------------|-------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 9-11  | VL PopDyn         | VL EvolSpielTh                | Artikel-diskussion      | Kurztest (45 min)          | eigenes Projekt       |
| 11-12 | STELLA-Tutorial   | STELLA-Übungen                | eigenes Projekt         | eigenes Projekt            |                       |
| 12-13 | Mittag            | Mittag                        | Mittag                  | Mittag                     | Mittag                |
| 13-14 | VL Räuber-Beute   | STELLA-Übungen + Kurzpräsent. | eigenes Projekt         | eigenes Projekt            | Vorträge (20 +10 min) |
| 14-15 |                   |                               |                         |                            |                       |
| 15-16 | STELLA-Einführung | Motivation Projekte           |                         |                            |                       |
| 16-17 | Besprechg.        | Artikel lesen                 | Repetition + Besprechg. | Besprechg. + Vortragstipps |                       |

**Leistungsprüfung:** - **Kurztest** (Donnerstagmorgen)  
- **Vortrag über das eigene Modellierprojekt** (Freitagnachmittag)

Vorlesungsbeginn: Punkt(!) 9 Uhr, Präsenz-Zeit 9-17 Uhr, Arbeitszeit ca. 7,5-8h pro Tag

Prof. Barbara Hellriegel 6

## Ergebnisse des Kurses

BIO 209 „Evolutionary Modelling in Prehistory“

### Räuber-Beute und Konkurrenz Modell

Gepard - Löwe - Antilope

Sabrina Meyer und Michana Pfaller

### Invasive Arten: das Marienkäferproblem

Siebenpunkt-Marienkäfer (Coccinella septempunctata)      Asiatischer Marienkäfer (Harmonia axyridis)

BIO 379

### Dreier-Beziehung

Algen - Daphnien - Guppies

How do a mainland and an island mockingbird population develop with an ectoparasite?

BIO 379 supervised by Barbara Hellriegel, Michèle Wegmann

Prof. Barbara Hellriegel 7

## Ergebnisse des Kurses

### Antibiotikaresistenz

Was bewirkt der Verzehr von Antibiotika verseuchtem Fleisch?

Veronica Preite & Bettina Streuli



### Modellierung einer Epidemieausbreitung am Beispiel SARS (Schweres akutes Atemwegssyndrom)

Anthropologisches Institut, Kurs BIO 209

Fabienne Klaus  
Thomas Hauser



### Modell der Gelenkwinkel beim vertikalen Klettern der Hominoidea

Kurs BIO209, Teil 2  
Karin Isler, 1.7.2005



### Cultural Transmission

- zwei Modelle zu sozialem Lernen

Andrea Strasser und Laura Damerius

Blockkurs: Evolutionary modeling in primatology

## Ergebnisse des Kurses

### KOLONIALGESCHICHTE NORDAMERIKAS



Konkurrenz

Räuber-Beute-Verhältnis

Amensalismus

### Kann man Feuer mit Feuer bekämpfen?

Interaktionen zwischen Mensch-, Vampir- und Werwolfpopulationen

Mario Aschmann  
Sofia Grize

Betreuerin:  
Barbara Hellriegel,  
BIO379 2009, Universität Zürich



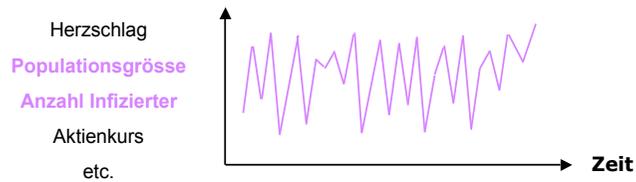
Prof. Barbara Hellriegel 10

Motivation  
Ideen  
Herangehensweise

## Berühmte Zeitreihe aus der Biologie



## Empirische Zeitreihen und allgemeine Fragen



- Lässt sich die zukünftige Entwicklung vorhersagen?
- Welche Faktoren beeinflussen den Kurvenverlauf?  
Sind z.B. Interaktionen mit anderen Arten wichtig?
- Bleiben die Schwankungen innerhalb gewisser Schranken?
- Stellt sich ein Gleichgewicht ein oder treten z.B. Zyklen auf?
- Kann das System in die Nähe der Nulllinie geraten oder zusammenbrechen?

Prof. Barbara Hellriegel 13

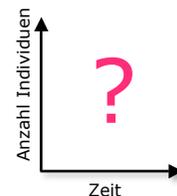
## Natürliche Systeme sind nicht-linear

Prof. Barbara Hellriegel 14

## Populationsdynamik mathematisch modellieren

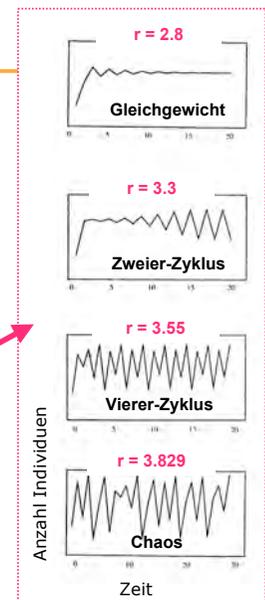
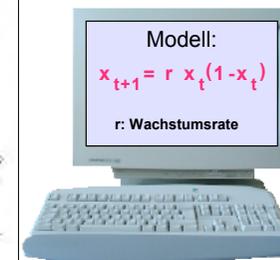
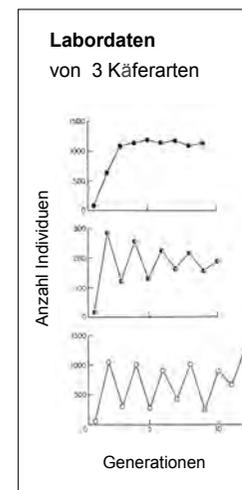
### Mathematik

- ist ein wichtiges Hilfsmittel wenn Nicht-Linearitäten auftreten
- ist sehr *exakt* - eine sehr *exakte Sprache*
- zwingt dazu Ideen *exakt und klar* zu formulieren
- ermöglicht die *exakte* Ableitung ihrer Konsequenzen
- verlangt diszipliniertes Denken



Prof. Barbara Hellriegel 15

## Populationsdynamik einer Art

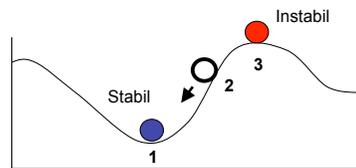


Prof. Barbara Hellriegel 16

## Gleichgewichte in der Populationsökologie

**Gleichgewicht** = die Population wächst nicht und schrumpft nicht, obwohl Individuen geboren werden und sterben  
 -> Nullwachstum der Pop.:  $b = d \rightarrow dN/dt = 0$   
 => Gleichgewichte können im Prinzip berechnet werden

**Stabilität:** ein Gleichgewicht ist stabil, wenn die Population nach einer Störung/kleinen Abweichung vom Gleichgewichtswert wieder zu diesem zurückkehrt



Prof. Barbara Hellriegel 17

## Organismen- und Populationswachstumsformen

- Zwei Arten von Organismen -> zwei Modelltypen
- Zwei Formen von Populationswachstum -> zwei Modelltypen

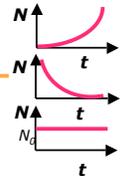
|  | Populationswachstum | Dichte-unabhängiges Pop.wachstum<br>-> exponentiell | Dichte-abhängiges Pop.wachstum<br>-> logistisch |
|--|---------------------|---|---|
| Organismen   |                     |   |   |
| Nicht-überlappende Generationen<br>-> diskrete Modelle |                     | diskrete exponentielle Modelle                      | diskrete ...                                    |
| Überlappende Generationen<br>-> kontinuierliche M.     |                     | kontinuierliche ...                                 | kontinuierliche logistische Modelle             |

Prof. Barbara Hellriegel 18

## Populationsdynamik einer einzelnen Art



## Dichte-unabhängiges Wachstum einer Art

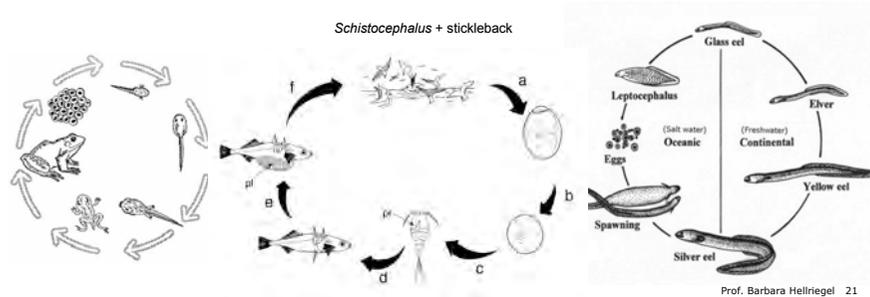
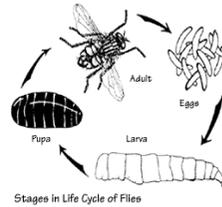


| Organismen   | Gleichung & Parameter   | Pop.wachstum<br>-> exponentiell   |
|--|---|---|
| Nicht-überlappende Generationen<br>-> diskrete Modelle | $N_{t+1} = \lambda N_t$<br>Lösung: $N_n = \lambda^n N_0$<br>$\lambda$ = endliche Wachstumsrate<br>$n$ = Anzahl Generationen<br>$N_0$ = Anfangsgröße d. Pop. | $\lambda > 1$ -> $N_t$ wächst exp.<br>$\lambda < 1$ -> $N_t$ schrumpft exp.l<br>$\lambda = 1$ -> $N_t$ ist konstant |
| Überlappende Generationen<br>-> kontinuierliche M.     | $dN/dt = r N(t)$<br>Lösung: $N(t) = e^{rt} N(0)$<br>$r$ = endliche Wachstumsrate<br>$t$ = kontinuierliche Zeit  | $r > 0$ -> $N(t)$ wächst exp.<br>$r < 0$ -> $N(t)$ schrumpft exp.<br>$r = 0$ -> $N(t)$ ist konstant                 |

Prof. Barbara Hellriegel 20

## Bsp: Organismen mit komplexen Lebenszyklen

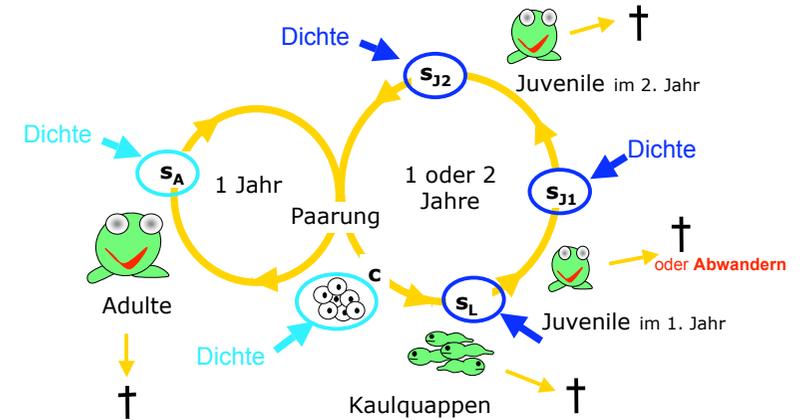
- verschiedene Phasen sind adaptiert an Wachstum, Migration und Reproduction
- Larven-Habitat  $\neq$  Adult-Habitat



## Schematischer Lebenszyklus



Drei Stadien: Larven, Juvenile, Adulte



## Gleichungen des Modells

**Dichteabhängigkeit** beeinflusst

**Reproduktion der adulten Weibchen**

$$H(t+1) = c \exp\left[-\beta_B \frac{A(t)}{K_B}\right] \frac{A(t)}{2}$$

**Überleben der Kaulquappen**

$$L(t+1) = s_L \exp\left[-\beta_L \frac{H(t+1)}{K_L}\right] H(t+1)$$

**Überleben/Abwandern der Juvenilen**

$$J(t+1) = s_{J1} \exp\left[-\beta_J \frac{L(t+1)}{K_J}\right] L(t+1)$$

**Überleben der Adulten**

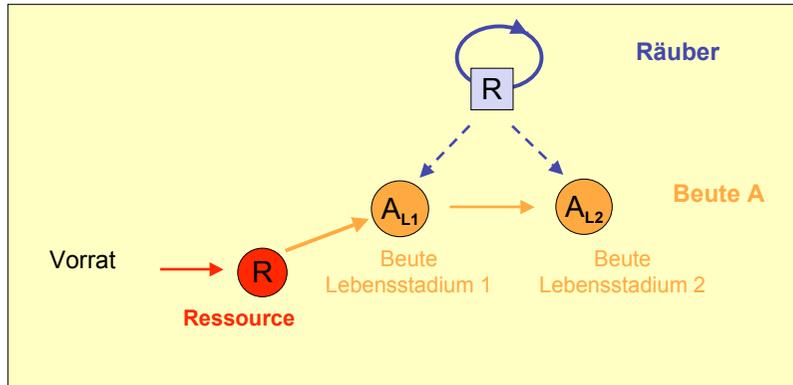
$$A(t+1) = s_A \exp\left[-\beta_A \frac{A(t)}{K_A}\right] A(t) + s_{J2} J(t)$$

Hellriegel, 2000. Oikos 88

## Räuber-Beute-Beziehungen

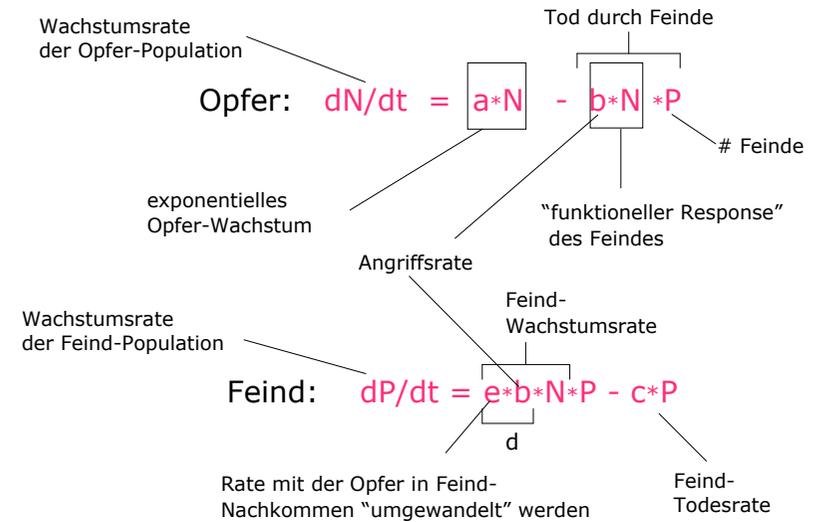


## Mathematisches Modell für Räuber-Beute-Beziehung



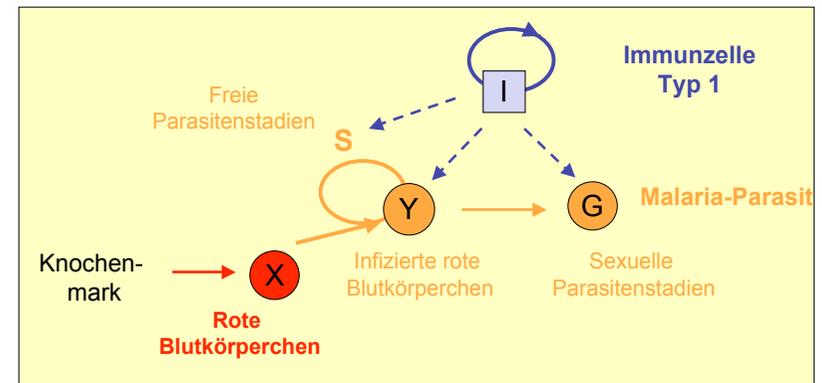
Prof. Barbara Hellriegel 25

## Feind - Opfer Interaktionen vom Lotka-Volterra-Typ



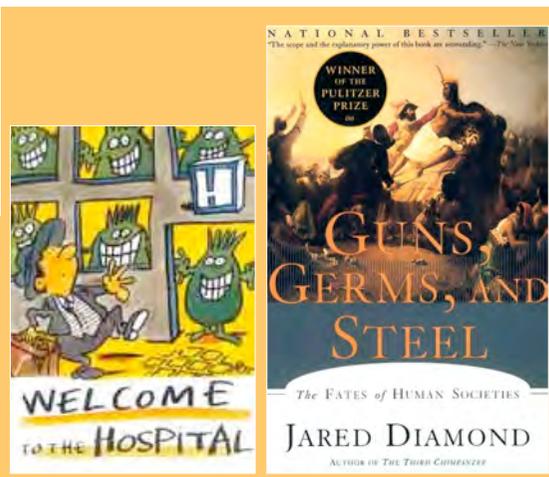
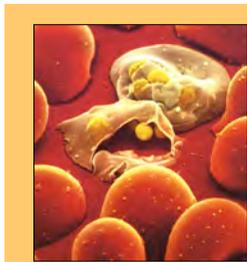
Prof. Barbara Hellriegel 26

## Modell für den Blutkreislauf einer Malaria-Infektion

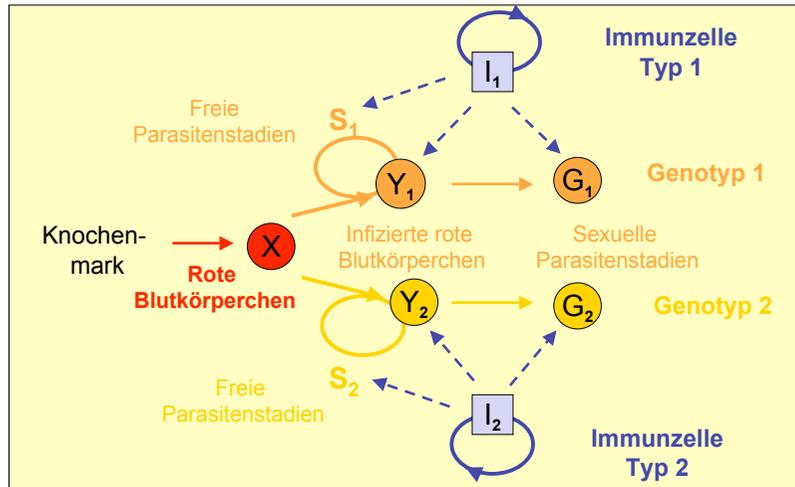


Hellriegel, B. 1992, Proc. R. Soc. Lond. B 250

## Ansteckende Krankheiten

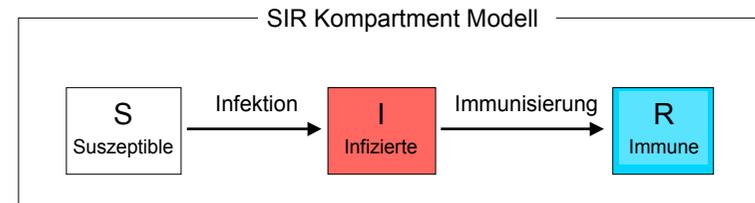
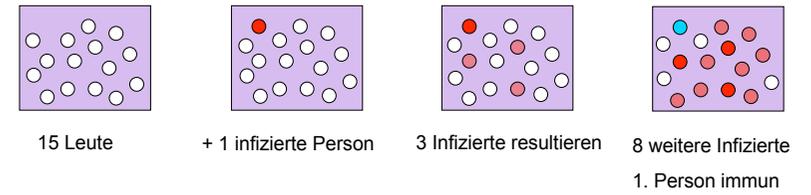


## ... Infektion mit zwei Parasiten-Genotypen



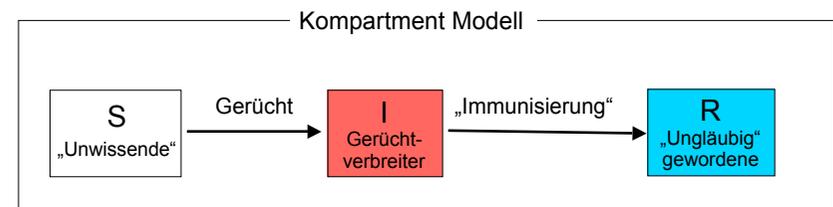
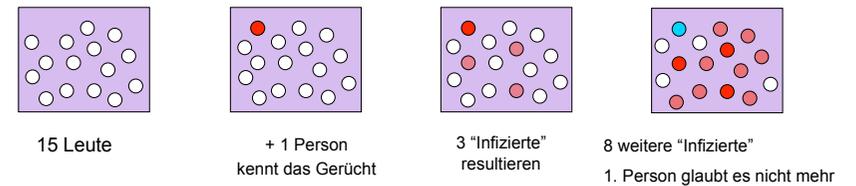
Hellriegel, B. 1992, *Proc. R. Soc. Lond. B* 250

## Klassisches SIR Modell für ansteckende Krankheiten



Prof. Barbara Hellriegel 30

## SIR Modell zur Ausbreitung einer Gerüchts



Prof. Barbara Hellriegel 32

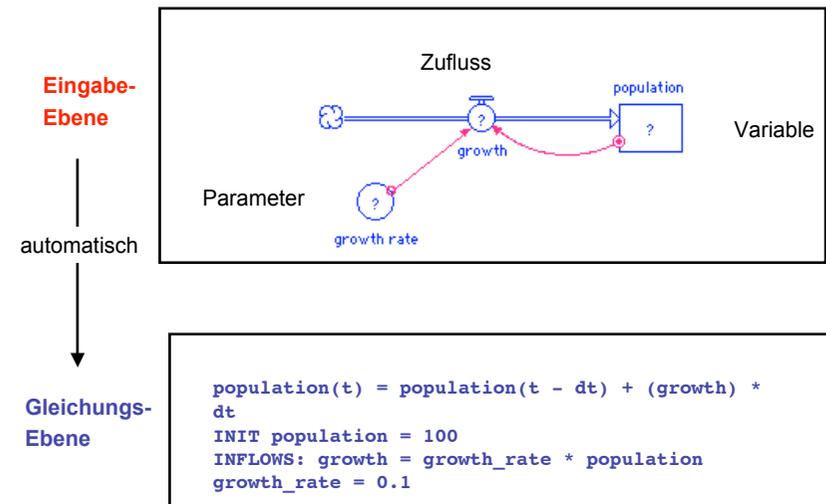
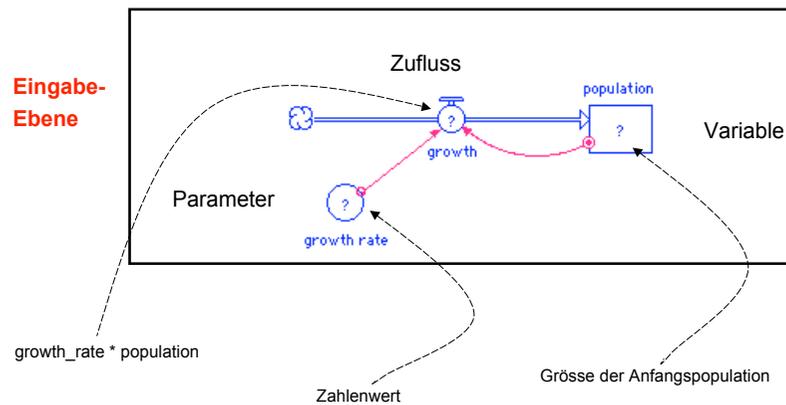
## Soziales Lernen



# Umsetzung am Computer



- Modelle werden über einfache Diagramme in einer speziellen STELLA-Symbolik eingegeben
  - es erleichtert das Verstehen existierender Modelle
  - es ermöglicht eigenes Modellieren
  - > hilft dynamische Systeme und Prozesse zu verstehen
- Diagramme werden in Differenzgleichungen umgesetzt
- Gleichungen werden numerisch mit Hilfe von Näherungsverfahren gelöst (Euler-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren 2. und 4. Ordnung)
- Möglichkeit zur Sensitivitätsanalyse





## STELLA-Sprache

```

population(t) = population(t - dt) +
dt
INIT population = 100
INFLOWS: growth = growth_rate * popu
growth_rate = 0.1

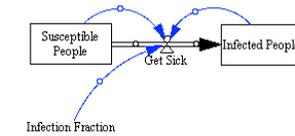
```

Length of simulation: From: 0 To: 12 DT: 0.25  
 Unit of time: Hours Days Weeks Months Quarters Years Other  
 Run Mode: Normal Cycle-time  
 Interaction Mode: Normal Flight Sim  
 Integration Method: Euler's Method Runge-Kutta 2 Runge-Kutta 4  
 Sim Speed: 0.15 real secs = 1 unit time  
 Min run length: 1.8 secs  
 Analyze Mode: stores run results in memory (0.0 MB required)

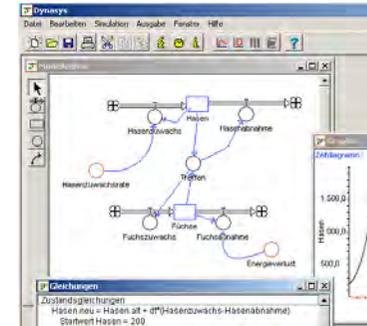


## Ähnlich aufgebaute Freeware

- Vensim PLE (Personal Learning Edition)



- Dynasys



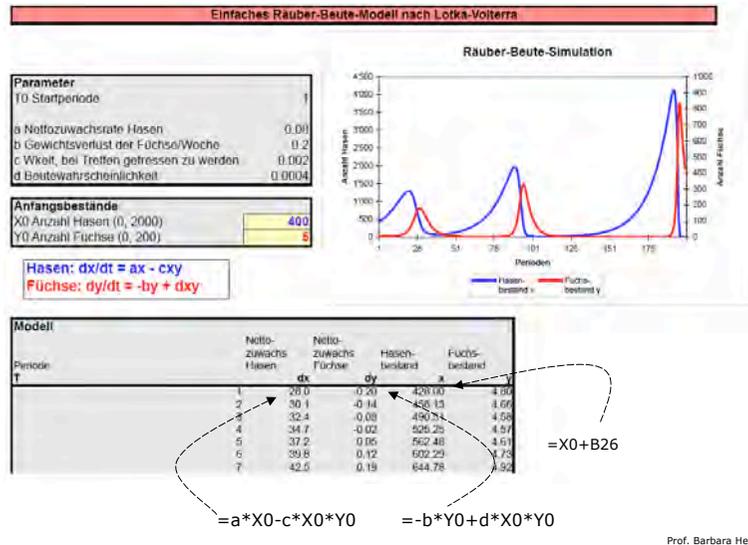
## Erfahrungen sammeln mit STELLA

- Wie würden Sie das **System-Verhalten** aufgrund Ihrer Untersuchungen **mit Worten beschreiben**?
- Welche **'Extrem-Zustände'** hat das System aufgrund Ihres Eingreifens angenommen?
- Waren **immer alle drei** 'Populationen' präsent?
- Haben Sie **Gleichgewichte** gefunden?
- Gibt es **Parameter**, die einen deutlich grösseren **Einfluss auf das System-Verhalten** haben als die übrigen?
- Können Sie Regeln für eine **gute Management-Politik** ableiten?

## Tabellenkalkulation (TK)

- Standard-Computeranwendung in vielen Berufszweigen
- wird erst zu mächtigem Werkzeug, wenn man mit Termen rechnet  
-> Verständnis für Terme und Termumformungen
- Variablenbegriff wird auf sehr konkreter Grundlage eingeführt
- fächerübergreifende Anwendungsmöglichkeiten
- zwei Einsatzmöglichkeiten:
  - als vorbereitetes elektronisches Arbeitsblatt
  - Schüler programmieren im TK-Programm selbst
- Handhabung erfolgt in allen Programmen auf dieselbe Weise, z.B.: OpenOffice, Excel

## Modellieren mit Excel



## Links

### Kurs-Material für Schüler/innen

- SimuLab - [www.caesar.de/schueler.html](http://www.caesar.de/schueler.html) -> Arbeitsblätter + Excel-Dateien

### Software

- STELLA - [www.iseesystems.com/software/Education/StellaSoftware.aspx](http://www.iseesystems.com/software/Education/StellaSoftware.aspx)  
kostenlose Versuchsversion (kein Speichern möglich) unter  
[www.iseesystems.com/community/downloads/STELLA/STELLADemo.aspx](http://www.iseesystems.com/community/downloads/STELLA/STELLADemo.aspx)

Ähnlich aufgebaute Freeware (z.B. verwendet von Peter Bützer)

- Vensim PLE (Personal Learning Edition) - [www.vensim.com/venple.html](http://www.vensim.com/venple.html)
- Dynasys - [www.hupfeld-software.de/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Dynasys](http://www.hupfeld-software.de/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Dynasys)

Prof. Barbara Hellriegel 42

## Literatur

### Mathematik

- B. Albright, 2010. **Mathematical Modeling with Excel**. Jones and Bartlett Publishers, ISBN: 978-0-7637-6566-8, Hardcover, 286 Seiten
- E.S. Allmann & J.A. Rhodes, 2004. **Mathematical Models in Biology - An Introduction**. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-52586-2, Softcover, 370 Seiten
- M. Nowak, 2006. **Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life**. -> Spieltheorie Harvard University Press, ISBN: 978-0674023383, Hardcover, 384 Seiten
- J.W. Prüss, R. Schnaubelt & R. Zacher, 2008. **Mathematische Modelle in der Biologie - Deterministische homogene Systeme**. Birkhäuser, Basel, ISBN: 978-3-7643-8436-4, Softcover
- A.B. Shiflet & G.W. Shiflet, 2006. **Introduction to Computational Science**. Princeton University Press, ISBN: 978-0-691-12565-7, Hardcover, 554 Seiten
- Christian Wissel, 1889. **Theoretische Ökologie** Springer, Berlin; ISBN: 9783540508489, Softcover -> nur noch gebraucht erhältlich

### Biologie

- C.R. Townsend J.L. Harper & M.E. Begon, 2003. **Ökologie** -> Populationsökologie mit Modellen Springer, Berlin; Auflage: 1 (2003), ISBN: 978-3-5400-0674-9, Softcover, 647 Seiten
- S.P. Otto & T. Day, 2007. **A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution**. Princeton University Press, ISBN: 978-0-691-12344-8, Hardcover, 752 Seiten

### Populär

- E. Behrends, 2008. Fünf Minuten Mathematik - 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT. Vieweg + Teubner, 2. Aufl., ISBN: 978-3-8348-0577-5, Hardcover

Prof. Barbara Hellriegel 43

## Vielen Dank

