

Mathematik

Maturitätsprüfung 2009
Klasse 4nc

Prüfungsdauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung, TI-89

Es können maximal 40 Punkte erreicht werden. Für 36 Punkte wird die Note 6 erteilt.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	2	1	1	2		2	1	1	1	1
b)	2	1	2	1		2	2	1	1	1
c)		1	1	1			1	1	1	2
d)		1						1	1	
total	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Sphärische Trigonometrie, Vektorgeometrie

- a) Ein Flugzeug fliegt auf dem kürzesten Weg von Lissabon ($9.2^\circ|38.7^\circ$) nach Rio de Janeiro ($43.2^\circ|-22.9^\circ$). Wo überquert es den Äquator?
 - b) Ein Schiff ist 4000 km von Lissabon und 5000 km von Rio entfernt. Bestimmen Sie die geographischen Koordinaten des Schiffs. (Erdumfang = 40'000 km)
Es genügt, die nördlichere der beiden möglichen Positionen anzugeben.
2. Von einer regelmässigen quadratischen Pyramide ABCDS sind die Ecken $A(0|4|1)$ und $C(2|2|9)$ gegeben. Die Spitze S liegt auf der Geraden

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Falls Teilaufgabe a) nicht gelöst wurde, kann bei den Teilaufgaben b) – d) der Punkt $(-11|15|11)$ als Spitze der Pyramide angenommen werden.

- b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
- c) Berechnen Sie den Winkel einer Seitenkante der Pyramide gegen die Grundfläche ABCD.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von B und D.

3. Eine Rinne wird aus zwei Brettern hergestellt, welche in den Ebenen $\Omega_1: -3x - 2y + 6z + 30 = 0$ und $\Omega_2: -2x + 3y + 6z + 5 = 0$ liegen. Eine Kugel mit dem Radius 7 rollt diese Rinne hinunter. (Dabei wird angenommen, dass die Schwerkraft in der Richtung der negativen z-Achse wirkt.)
- a) Berechnen Sie den Winkel dieser Ebenen mit der xy-Ebene.
 - b) Bestimmen Sie die Bahn des Kugelmittelpunkts.
 - c) In welchem Punkt trifft die Kugel auf die xy-Ebene auf?

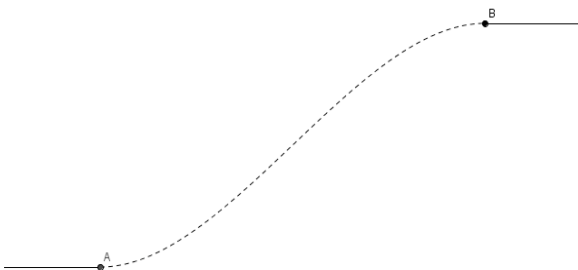
Falls Teilaufgabe b) nicht gelöst wurde, kann die Gerade

$$b: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als Bahn des Kugelmittelpunkts angenommen werden.

Analysis

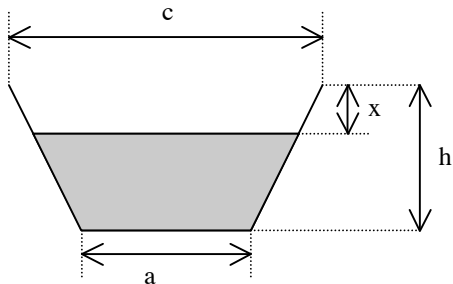
4.



Zwei horizontale Strassenstücke sollen durch ein ansteigendes Strassenstück verbunden werden. Dabei soll die Auffahrt in A waagrecht beginnen und in B waagrecht einmünden. Die horizontale Distanz der Punkte A und B beträgt 40 m, der Höhenunterschied 5 m.

- a) Beschreiben Sie die Verbindungskurve durch eine ganzrationale Funktion mit möglichst kleinem Grad.
 - b) In welchem Punkt ist die Strasse am steilsten?
 - c) Berechnen Sie auch diesen maximalen Steigungswinkel.
5. Ein Rotationskörper besteht aus einem Zylinder mit einem aufgesetzten Kegel. Beide Teilkörper haben dieselbe Mantellinie s . Wie gross kann das Volumen dieses Körpers höchstens sein?

6. Das Ausbaggern einer Baugrube wird mit zunehmender Tiefe immer teurer. Der Aushub von einem Kubikmeter Erdreich in der Tiefe x [m] kostet $100 + 10x^2$ Franken.
- a) Wie viel muss man für den Aushub eines 5 m tiefen zylindrischen Schachts mit dem Radius $r = 2$ m bezahlen?



- b) Eine Baugrube hat die Form eines regelmässigen quadratischen Pyramidenstumpfs mit $a = 10$ m, $c = 14$ m, $h = 3$ m. Die Figur zeigt einen Längsschnitt durch die Grube, wenn die Tiefe x erreicht ist. Wie viel kostet der Aushub der ganzen Grube?

7. Ein stehender zylindrischer Tank hat eine Querschnittsfläche $A = 0.1$ m². Pro Sekunde werden 0.03 m³ Wasser in den Tank gepumpt. Gleichzeitig fliesst durch ein kleines Loch im Boden mit dem Querschnitt $q = 0.003$ m² wieder Wasser aus dem Tank. Bei der Füllhöhe h strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ aus dem Tank. $V(t)$ [m³] sei das Volumen des Wassers im Tank zum Zeitpunkt t [s], $h(t)$ [m] die Füllhöhe zum Zeitpunkt t .

- a) Geben Sie die Volumenänderung ΔV des Wassers bei der Füllhöhe h in einer kleinen Zeitspanne Δt an.
- b) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $h = h(t)$.

Falls Teilaufgabe b) nicht gelöst wurde, verwende man für die Teilaufgaben c) und d) die Differentialgleichung $h' = 10(0.02 - 0.002\sqrt{2gh})$

- c) Der Wasserstand im Tank stabilisiert sich schliesslich bei einer Füllhöhe h_G . Berechnen Sie diese Gleichgewichtshöhe h_G .
- d) Zum Zeitpunkt 0 sei der Tank leer. Wie lange dauert es, bis die Füllhöhe 4 m beträgt? Es genügt dabei, das Resultat auf 0.5 s genau anzugeben.

Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik

8. Ein Werbekugelschreiber enthält einen Klickmechanismus, welcher bei Gebrauch innerhalb eines Tages mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 ausfällt.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 Kugelschreibern mindestens 7 nach einem Tag noch funktionsfähig sind?
- b) Wie viele Kugelschreiber müsste man austesten, damit man mit 99% Sicherheit mindestens einen Kugelschreiber hat, dessen Klickmechanismus ausfällt?

Ein weiteres, äusserlich völlig identisches Kugelschreibermodell besitzt eine verbesserte Mechanik, deren Ausfallwahrscheinlichkeit nur noch 10% beträgt. Ein Kunde erhält eine sehr grosse Lieferung von Kugelschreibern. Um zu testen, ob das verbesserte Modell geliefert wurde, wird in einer Stichprobe vom Umfang 100 der Klickmechanismus geprüft. Findet man höchstens 15 Kugelschreiber mit einer anfälligen Mechanik, wird angenommen, dass es sich um das verbesserte Modell handelt.

- c) Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit α arbeitet dieser Test?
- d) Bestimmen Sie bei diesem Test auch die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn man tatsächlich eine Lieferung mit dem alten Modell des Kugelschreibers erhalten hat.
9. 10% aller schwangeren Frauen sind Raucherinnen. Das Geburtsgewicht [g] der Neugeborenen von Raucherinnen ist $N(2800, 300)$ -verteilt, bei Nichtraucherinnen $N(3100, 400)$ -verteilt.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes einer Raucherin mindestens 3000 g wiegt?
- b) Je ein Kind einer Raucherin und einer Nichtraucherin werden zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Kind der Nichtraucherin schwerer?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht eines zufällig gewählten Neugeborenen höchstens 2700 g beträgt?
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein Neugeborenes mit einem Geburtsgewicht von höchstens 2700 g von einer Raucherin?
10. Eine Urne enthält 15 rote, 10 weisse und 5 schwarze Kugeln. Bei einem Glücksspiel werden fünf Kugeln zufällig herausgegriffen.
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man lauter rote Kugeln?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei rote und zwei weisse Kugeln sowie eine schwarze Kugel zieht?
- c) R sei die Anzahl der roten, W die Anzahl der weissen und S die Anzahl der schwarzen Kugeln unter den fünf ausgewählten Kugeln. Die Gewinnauszahlung X bei diesem Spiel sei
- $$X = \begin{cases} 0 & \text{falls } R < 2 \\ (R - 1) \cdot W \cdot (S + 1) & \text{falls } R \geq 2 \end{cases}$$
- Berechnen Sie die mittlere Auszahlung pro Spiel.