

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2008

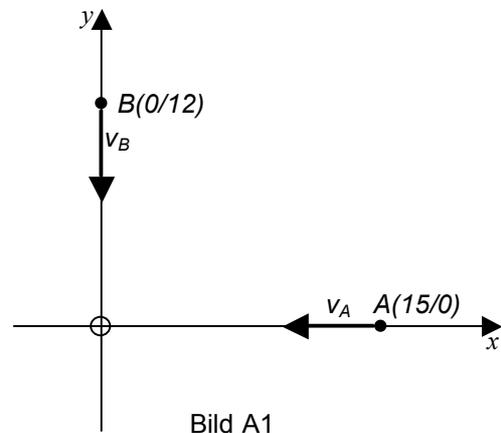
- Hilfsmittel:
- Formelsammlung DMK/DPK
 - Taschenrechner Texas Instruments TI-84
- Prüfungsdauer:
- 180 Minuten
- Bemerkungen:
- Für jeden Aufgabenblock muss ein neuer Bogen verwendet und mit der entsprechenden Themenüberschrift angeschrieben werden.
 - Jeder Bogen muss mit dem Namen angeschrieben werden.
 - Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe klar ersichtlich und nachvollziehbar sein.
- Bewertung:
- Die Punktverteilung der einzelnen Aufgabenblöcke sieht folgendermassen aus:
Analysis: 19 ½ Pkte.
Stochastik: 16 ½ Pkte.
Vektorgeometrie: 20 Pkte.
Aufgaben aus unterschiedlichen Themenbereichen: 20 ½ Pkte.
 - Für die Note 6 müssen nicht alle Punkte erreicht werden.
 - Die Darstellung wird mitbewertet!

I. ANALYSIS

AUFGABE 1

Zwei Massenpunkte A und B bewegen sich längs der beiden Koordinatenachsen gleichförmig mit den Geschwindigkeiten $v_a = 0.5 \text{ m/s}$ bzw. $v_b = 0.6 \text{ m/s}$ in Richtung des Koordinatenursprungs (Bild A1). Zu Beginn ($t = 0 \text{ s}$) befinden sie sich an den Orten $x(0) = 15 \text{ m}$ bzw. $y(0) = 12 \text{ m}$.

Nach welcher Zeit t ist ihr gegenseitiger Abstand am kleinsten und wie gross ist dieser dann?



AUFGABE 2

Gegeben ist der Kreis k und die lineare Funktion f mit folgenden Funktionsgleichungen:

$$k : (x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad f : y = 2x$$

Berechne den Inhalt des kleineren Flächenstücks, das durch die Kreislinie und die Gerade begrenzt ist.

AUFGABE 3

Eine Kugel mit dem Durchmesser $d_K = 60$ erhält eine einseitige, kegelförmige Bohrung mit dem Grundkreisdurchmesser $d = 25$. Berechne das Volumen des Restkörpers, wenn die Kegelspitze bis zum Kugelmittelpunkt reicht.

II. STOCHASTIK

AUFGABE 1

Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt; gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obwohl sie vorhanden ist.

Bei der HIV-Diagnostik sind die Empfindlichkeit des Tests, vor allem aber die Zuverlässigkeit positiver Testergebnisse von besonderer Bedeutung. Man kann heute davon ausgehen, dass etwa 0.1 % der Bevölkerung der Schweiz HIV-infiziert ist.

Die vorliegenden Testverfahren (Stand: 2007) zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit: Bei 99.9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt eine positive Testreaktion; nur bei 0.3 % der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt.



- Angenommen, eine Person werde zufällig ausgewählt: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei Vorliegen eines positiven Testergebnisses tatsächlich eine HIV-Infektion vorliegt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei negativem Testergebnis dennoch eine Infektion vorliegt?
- Wenn ein HIV-Test positiv verlaufen ist, wird er bei der betreffenden Person noch einmal durchgeführt. Was lässt sich zur Wahrscheinlichkeit einer HIV-Infektion sagen, wenn auch dieser Test positiv ausfällt?

AUFGABE 2

Bei der Produktion von Porzellangefässen sind erfahrungsgemäss 25 % der Gefässe wegen schlechter Form, 15 % wegen unsauberer Farbe und 20 % wegen ungleichmässiger Oberfläche nicht 1. Wahl. Ein Porzellangefäss ist 2. Wahl, wenn es genau eine der drei Kontrollen nicht besteht, der Rest ist Ausschussware.

- Wie gross ist der Anteil der Gefässe 1. Wahl?
- Wie gross ist der Ausschussanteil und wie gross der Anteil der Gefässe 2. Wahl?

AUFGABE 3

Durch Befragungen nach Wahlen will man feststellen, wie zuverlässig die Angaben sind, die Personen über ihr Wahlverhalten machen.

In einer Stichprobe unter 1349 Wahlberechtigten behaupten 1260, sich an der Wahl beteiligt zu haben. Die Wahlbeteiligung betrug 91 %.

Bestätigt dies die Hypothese, dass Personen nicht zugeben wollen, nicht gewählt zu haben?

AUFGABE 4

Ein Kopfschmerzmittel macht 70 % aller an Kopfschmerzen leidenden Menschen beschwerdefrei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hilft es bei höchstens 17 von 20 ausgewählten Kopfschmerzpatienten?

AUFGABE 5

In einer Urne befinden sich 30 Kugeln, 15 blaue, 10 rote und 5 weisse. Man nimmt sechs Kugeln aus der Urne raus und legt sie in einen leeren Sack. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dem Sack dann 3 blaue, 2 rote und eine weisse Kugel befinden?

III. VEKTORGEOMETRIE

AUFGABE 1

Der Punkt $P(4|-1/2)$ rotiert um die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Berechne die Koordinatengleichung der Ebene, in der der Kreis liegt.
- Berechne den Radius des Kreises.

AUFGABE 2

Bestimme die Koordinatengleichung aller Ebenen, die zur Ebene $E: 4x - 2y + 4z - 3 = 0$ parallel sind und von ihr den Abstand 5 haben.

AUFGABE 3

Ein Kreis mit dem Radius $r = 10$ geht durch den Punkt $P(-2/7)$ und berührt die Gerade $g: 4x + 3y - 63 = 0$. Berechne die Kreisgleichung!

[Hinweis: Fertige eine Skizze an und beschreibe vor dem Rechnen Deinen Lösungsweg.]

AUFGABE 4

Die vier Punkte $A(-1/-7/1)$, $B(5/1/3)$, $C(8/-3/0)$ und $D(6/2/9)$ bilden den Tetraeder $ABCD$. Berechne den Neigungswinkel der Kante AD bezüglich der Fläche ABC .

IV. AUFGABEN AUS UNTERSCHIEDLICHEN THEMENBEREICHEN

AUFGABE 1

Die Bewegung eines Körpers wird durch die Widerstandskräfte seines Umfeldes (z.B. Reibung, Luftwiderstand usw.) verlangsamt. Dabei gelte folgende Beziehung:

$$x(t) = \frac{100}{3} \cdot \ln(0.12 \cdot t + 1)$$

Dabei ist x der zurückgelegte Weg in Meter und t die Zeit in Sekunden.

- Bestimme die Länge der zurückgelegten Strecke nach 20 Sekunden.
- Nach wie vielen Sekunden hat der Körper 0.12 km zurückgelegt?

AUFGABE 2

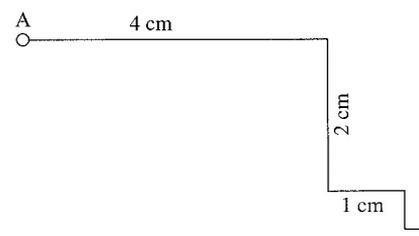
Löse folgende lineare Differentialgleichung:

$$x \cdot y' + y = 2 \cdot \ln x \quad \text{mit } y(e) = 2$$

AUFGABE 3

Gegeben ist der rechts dargestellte Streckenzug. Die Längen der Teilstrecken bilden eine geometrische Folge.

Der Streckenzug wird unendlich lange fortgesetzt und konvergiert gegen den Grenzpunkt X . Berechne die horizontale und vertikale Entfernung des Punktes X bezüglich des Anfangspunktes A .



AUFGABE 4

Gegeben ist folgende rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2}$$

- a) Berechne die Asymptoten dieser Funktion.
- b) Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$ schliesst mit dem Graphen von f und der y -Achse ein Flächenstück vollständig ein. Berechne diesen Flächeninhalt (Skizze).