MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2006

Hilfsmittel:
- Formelsammlung DMK/DPK
- Taschenrechner Texas Instruments TI-89

Prüfungsdauer:
- 180 Minuten

Bemerkungen:
- Für jeden Aufgabenblock muss ein neuer Bogen verwendet und mit der entsprechenden Themenüberschrift angeschrieben werden.
- Jeder Bogen muss mit dem Namen angeschrieben werden.
- Der Lösungsweg muss bei jeder Aufgabe klar ersichtlich und nachvollziehbar sein.

Bewertung:
- Die Punktverteilung der einzelnen Aufgabenblöcke sieht folgendermassen aus:

  Vektorgeometrie: 19 ½ Pkte.
  Analysis: 18 ½ Pkte.
  Stochastik: 17 ¾ Pkte.
  Aufgaben aus unterschiedlichen Themenbereichen: 14 Pkte.

- Für die Note 6 müssen nicht alle Punkte erreicht werden.
- Die Darstellung wird mitbewertet!

I. VEKTORGEOMETRIE

AUFGABE 1

Gegeben sind die Punkte $A(4/1/3)$, $B(4/-2/6)$, $C(1/1/6)$ und $D(5/2/7)$.

a) Zeige, dass diese Punkte ein reguläres Tetraeder bilden.

b) Berechne den Winkel zwischen zwei Kanten.

c) Berechne den Winkel zwischen einer Kante und einer nicht anliegenden Seitenfläche.

d) Berechne den Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

e) Berechne das Volumen des Tetraeders.

AUFGABE 2

Die Grundfläche eines Spielplatzes liegt in der xy-Ebene. Auf ihm steht eine innen begehbare, senkrechte, quadratische Pyramide aus Holz mit den Eckpunkten $A(3/8/0)$, $B(12/11/0)$, $C(9/20/0)$, $D(0/17/0)$ und der Spitze $S(6/14/10)$.

Paralleles Sonnenlicht fällt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf den Spielplatz.

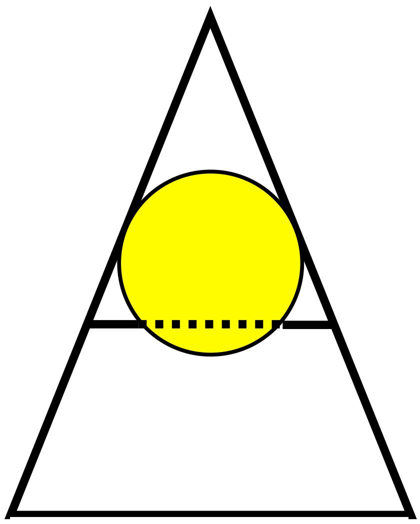
a) Berechne die Koordinaten des Punktes S', auf den der Schatten der Pyramidenspitze fällt.

b) Auf dem Spielplatz wird ein Hang aufgeschüttet. Er genügt folgender Ebenengleichung:

$$E: \quad x + 2y + 4z - 14 = 0$$

Der Schatten S^* der Pyramidenspitze fällt jetzt auf den Hang. Berechne S^*.

c) In der Pyramide ist parallel zum Boden eine Platte befestigt, die in der Mitte eine kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser $d = 2.4$ hat. Ein grosser Schaumstoffball hat den Radius $r = 1.5$. Beim Aufräumen muss der Ball durch die Öffnung nach oben gedrückt werden.
In welcher Höhe ist die Platte angebracht, wenn sie sich so weit oben wie möglich befindet und der aufbewahrte Ball "entspannt" in der Öffnung liegt (siehe rechte Skizze)?



"Entspannte" Lage: Der Ball liegt gerade noch entspannt in der Öffnung, wenn er die Seitenfläche der Pyramide berührt.

AUFGABE 3

Da Präsident Strauch vom Regieren keine Ahnung hat, widmet er seine "kostbare" Zeit lieber dem Golfspiel. Doch auch das Golfspiel birgt Probleme, die der Präsident nicht selbständig lösen kann.

Der von ihm abgeschlagene Golfball bewegt sich nämlich gemäss folgender Gleichung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

($t \geq 0$ sei die Masszahl der Zeit [s], die *xy*-Ebene entspricht dem Erdboden).

Während der Präsident die Flugbahn seines Golfballes beobachtet, schiessen ihm folgende Fragen durch den Kopf:

a) Wann und in welchem Punkt hat der Golfball wieder seine Ausgangshöhe über der *xy*-Ebene erreicht?

b) Wo befindet sich der höchstgelegene Punkt der Wurfparabel!

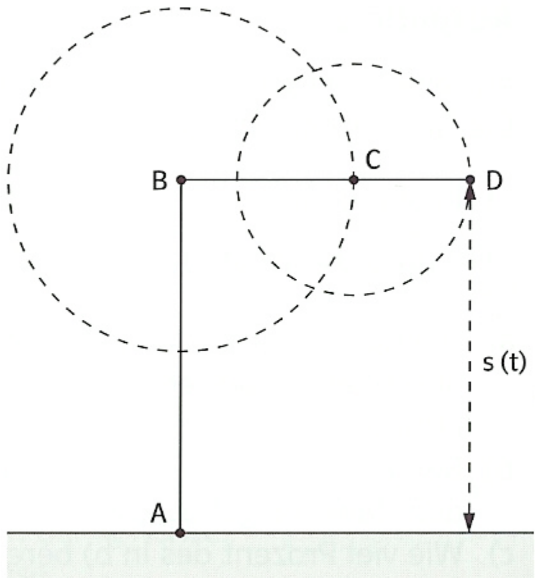
c) Wann trifft der Golfball auf dem Erdboden auf?

Da Präsident Strauch auch für dieses Problem keine geeigneten Berater in seinem Stab besitzt sollst Du die Fragen beantworten.

II. ANALYSIS

AUFGABE 1

Bei einem motorgetriebenen Gestänge (siehe Bild rechts) dreht sich die Stange *BC* um *B* und die Stange *CD* um *C*, jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn. Für eine volle Umdrehung benötigt *BC* zwei Minuten und *CD* eine Minute.
Die Figur zeigt die Ausgangslage zu Beginn der Beobachtung $(t = 0)$.
$s(t)$ gibt den Abstand des Punktes *D* vom Boden zur Zeit t an (t in min, $s(t)$ in cm).
Die Längen der Stangen sind: *AB* ist 60 cm lang, *BC* ist 30 cm lang und *CD* ist 20 cm lang.



a) Zeichne in verschiedenen Figuren den Zustand des Gestänges nach 15 Sekunden und nach 30 Sekunden.

b) Bestimme den Funktionsterm von $s(t)$.
[Hinweis: Winkel im Bogenmass!]

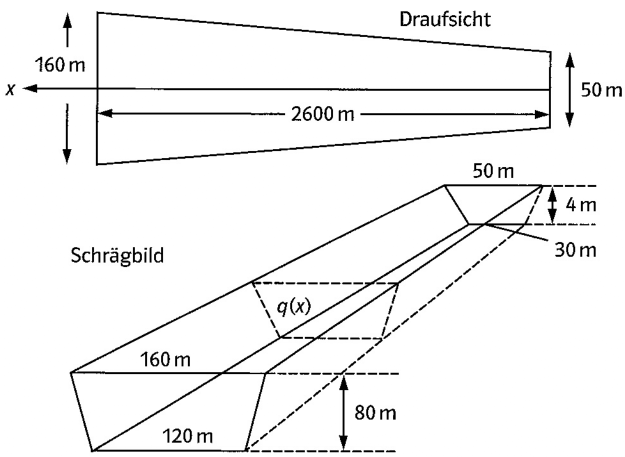
c) Mit welcher vertikalen Geschwindigkeit bewegt sich der Punkt *D* durch die Ausgangslage?

d) Es sei t_0 der Zeitpunkt, an dem der Abstand des Punktes *D* vom Boden zum ersten Mal am grössten ist. Ermittle mit Hilfe des SOLVERs einen Näherungswert von t_0 !
Wie weit ist der Punkt *D* in diesem Zeitpunkt vom Boden entfernt?

AUFGABE 2

Ein Staubecken mit senkrechten Abschlussmauern besitzt an jeder Stelle einen trapezförmigen Querschnitt. Die Masse kann man aus der nebenstehenden Figur entnehmen. Berechne das Fassungsvermögen (in m^3) des Staubeckens!

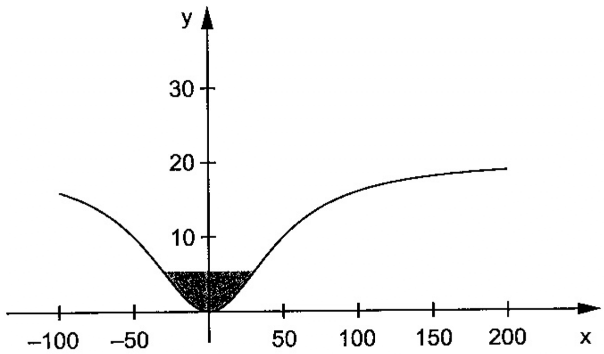
[Hinweis: Die Trapeze der Abschlussmauern sind nicht zueinander ähnlich!]



AUFGABE 3

Das Profil eines Flussbettes und des angrenzenden Ufers wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben (Einheiten in m, siehe Bild rechts):

$$f(x) = \frac{20 \cdot x^2}{x^2 + 2500}$$



Auf Grund von Trockenheit sinkt der Wasserspiegel täglich. Im Punkt $P(150/?)$ des Ufers steht ein Turm, von dem aus man durch ein kleines Fenster in 5 Meter Höhe auf den Fluss blicken kann. Nach einer gewissen Zeit ist der Wasserspiegel aus dem Fenster nicht mehr zu sehen. Wie tief ist dann der Fluss an seiner tiefsten Stelle höchstens?
[Hinweis: Treten Gleichungen höheren Grades auf, dürfen diese mit dem SOLVER gelöst werden].

III. STOCHASTIK

AUFGABE 1

Beim Spielen mit einem Würfel stellt ein Spieler fest, dass die Augenzahl 1 überdurchschnittlich häufig, die Augenzahl 6 dagegen relativ selten auftrat. Dies führte zu der Vermutung, dass die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln, den Wert 0.2 hat, die Wahrscheinlichkeit für 6 dagegen 0.1 beträgt und dass die anderen Augenzahlen mit untereinander gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten.

a) Die Vermutung treffe zu. Die Zufallsvariable X beschreibe die Augenzahl beim einmaligen Werfen des Würfels. Berechne den Erwartungswert von X.
Der Würfel wird nun sechsmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man:
A: Immer die gleiche Augenzahl;
B: Lauter verschiedener Augenzahlen;
C: Dreimal die 1 und dreimal die 6?

b) Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, sei $p = 0.1$. Es wird 1000 mal gewürfelt und die Anzahl der auftretenden Sechsen festgestellt. Bestimme dafür den Erwartungswert μ.
Bestimme ein möglichst kleines $k \in N$, so dass die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % in das Intervall $[\mu - k; \mu + k]$ fällt.

c) Die Vermutung, dass die 6 mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ auftritt, wird bezweifelt und in einem zweiseitigen Test mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 5 % überprüft. Dazu wird der Würfel 2000 mal geworfen. Bestimme den Ablehnungsbereich!

d) Mit dem Würfel aus Teilaufgabe a) wird von den Spielern Harry und Sally ein Glücksspiel nach folgenden Regeln durchgeführt:
Spieler Harry legt als Einsatz k Fr. $(k > 4)$ auf den Tisch und würfelt zweimal. Für jeden der beiden Würfe gilt:

- Fällt eine 6, so muss Sally den auf dem Tisch liegenden Betrag durch Zuzahlen verdreifachen.
- Würfelt Harry eine 1, so nimmt Sally 2 Fr. vom Tisch.
- In den übrigen Fällen nimmt Sally 1 Fr. vom Tisch.
- Am Ende des Spiels nimmt Harry den noch auf dem Tisch liegenden Betrag.

Wie gross muss k sein, damit das Spiel fair ist?

AUFGABE 2

Zitat aus dem Film "Harry und Sally" mit Billy Crystal und Meg Ryan (1989):

```
"Aber den Kuchen bitte heiss, wenn's geht. Und ich will
das Eis nicht obendrauf, ich will es extra und ich hätte
gerne Erdbeer- statt Vanilleeis, wenn's geht. Wenn nicht:
Kein Eis - nur Schlagsahne - aber nur frische. Wenn sie
aus der Dose kommt, gar nichts."
"Nicht mal Kuchen?"
"Doch, in dem Fall nur den Kuchen, aber bitte nicht
heiss."
"Aha."
```

Harry und Sally sitzen in einem Restaurant. Sally wählt aus der Karte "*kalter Kuchen mit Vanilleeis*" aus und bestellt nach obigem Zitat. Aus Erfahrung kennt der Kellner folgende Wahrscheinlichkeiten:

- P(Kuchen wird auf Wunsch heiss gemacht) = 1
- P(im Kühlschrank befindet sich Erdbeereis) = 0.3
- P(Schlagsahne ist frisch) = 0.6

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sally ihren heissen Kuchen mit Erdbeereis bekommt?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie den Kuchen mit frischer Schlagsahne erhält?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sally nur den Kuchen bekommt?

AUFGABE 3

Erfahrungsgemäss gibt es in unserer Bevölkerung 4 % Farbenblinde.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 200 Personen höchstens vier farbenblinde?

b) Wieviele Personen muss man mindestens überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einen Farbenblinden zu finden?

IV. AUFGABEN AUS UNTERSCHIEDLICHEN THEMENBEREICHEN

AUFGABE 1

Das dritte Glied einer geometrischen Folge $\langle a_n \rangle$ lautet $a_3 = -\sqrt{3}$, das achte $a_8 = \frac{1}{9}$.

a) Gib diese Folge in ihrer expliziten Darstellung an.

b) Ab welchem Folgeglied sind alle weiteren Folgeglieder kleiner als 10^{-5}?

c) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

AUFGABE 2

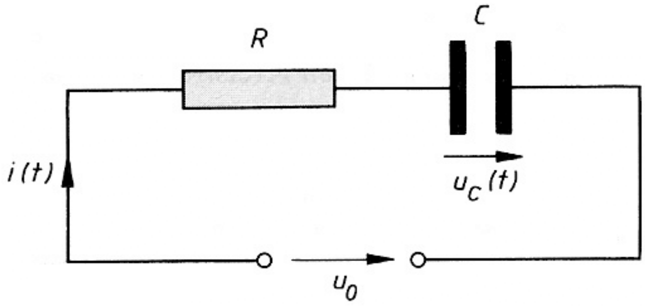
Radiokarbonmethode: Das Kohlenstoffisotop C-14 ist natürlich radioaktiv mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren. Es kommt in der Atmosphäre sowie in lebenden Organismen vor und sein Anteil bleibt konstant, solange die Organismen leben. Nach dem Tod nimmt der C-14 Anteil exponentiell ab.

a) In Holzresten aus der Höhle von Lascaux stellte man 14.5 % des ursprünglichen C-14 Gehalts fest. Berechne daraus das Alter dieser Holzreste.

b) Das Turiner Grabtuch wird von vielen Gläubigen als das Grabtuch Jesu angesehen. Wie gross müsste der C-14 Gehalts des Tuches sein, wenn es tatsächlich aus der Zeit Jesu stammen würde?
[Hinweis für bibelunkundige Menschen: Jesu lebte nach der Überlieferung von ca. 6 v. Chr. bis ca. 30 n. Chr].

AUFGABE 3

Die Aufladung eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R wird durch folgende lineare Differentialgleichung beschrieben (siehe Bild rechts):



$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

Dabei ist $u = u(t)$ die von aussen angelegte Spannung und $u_C = u_C(t)$ die Spannung am Kondensator.

a) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bei einer konstanten äusseren Spannung $u(t) = u_0$.

b) Wie lautet die Lösung für den Anfangswert $u_C(0) = 0$?

c) Folgende Grössen sind bekannt:

$$R = 1000\ \Omega \qquad C = 10\ \mu\text{F} \qquad u_0 = 400\ \text{V}$$

Nach welcher Aufladezeit liegt über dem Kondensator C die gleiche Spannung wie über dem Widerstand R?