

## MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2006

Fach: Mathematik

Lehrer: Prof. J. Züger

Es sind folgende Hilfsmittel zugelassen: Taschenrechner (nicht grafikfähig) und Formelsammlung.

Die Ausrechnungen sind vollständig zu dokumentieren! Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen! Du hast 4 Stunden Zeit. Abgabe ist somit um 12.00 Uhr.

### Ich wünsche euch viel Erfolg!

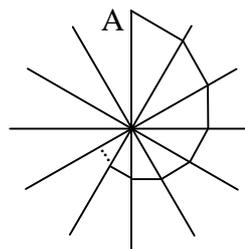
#### 1) Zahlenfolgen

a) Gegeben ist die Zahlenfolge  $a_n = \frac{3n+1}{2n+4}$ .

i) Bestimme den Grenzwert der Folge für  $n \rightarrow \infty$ !

ii) Ab welchem Glied sind alle Glieder weniger als 0.01 vom Grenzwert entfernt?

b) Sechs Geraden schneiden sich in einem Punkt. Der Winkel zwischen benachbarten Geraden ist überall gleich gross. Der Punkt A liegt auf einer dieser Geraden im Abstand 10 vom Schnittpunkt. Von A aus zieht man das Lot auf die benachbarte Gerade, vom Lotfusspunkt das Lot auf die nächste usw. Wie lang ist die ganze Spirale?



c) Bei einer arithmetischen Folge beträgt die Summe der ersten 132 Glieder 330, die Summe der ersten 133 Glieder 133. Bestimme  $a_1$  und  $d$ !

12 Punkte

2) Gegeben ist die Funktion  $f_a(x) = \frac{x^2 + ax - 2}{x - 3}$ .

a) Bestimme den Parameter  $a$  so, dass eine Asymptote durch den Punkt  $P(2/4)$  geht.

Falls du Aufgabe a) nicht lösen konntest, löse die folgenden Aufgaben für  $a = 1$  !

b) Führe für diesen Parameterwert  $a$  eine vollständige Kurvendiskussion durch. Bestimme also die Nullstellen, die Extrempunkte, die Wendepunkte, sowie die Gleichungen aller Asymptoten und zeichne den Graphen an Hand dieser Daten.

c) Bestimme für dasselbe  $a$  die Fläche, die von  $y = f_a(x)$  und der  $x$ -Achse umschlossen wird!

14 Punkte

- 3) Gegeben sind die beiden Kurven  $k_1 : y = \frac{1}{8}x^3$  und  $k_2 : y = px^2 - 4$ .
- Skizziere die Situation so, dass sich die beiden Kurven berühren!
  - Bestimme den Parameter  $p$  so, dass sich die beiden Kurven berühren!

Falls du a) nicht lösen konntest, löse folgende Aufgaben für  $k_2 : y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}$

- Wie lauten die Koordinaten des Berührungspunktes?
- Wie gross ist der Inhalt der Fläche, den die beiden Graphen umschliessen?

11 Punkte

- 4) Drei voneinander unabhängige Aufgaben:

- Von einer Funktion  $y = f(x)$  kennt man die zweite Ableitung  $y'' = x \cdot e^x$ . Weiter weiss man, dass der Graph der Funktion  $y = f(x)$  bei  $P(1/0)$  einen Extrempunkt hat. Bestimme die Gleichung der Funktion  $y = f(x)$ !
- Beweise, dass sich die beiden Kurven  $y = \cos x$  und  $y = \tan x$  im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  unter einem rechten Winkel schneiden!
- Die Kurve  $y = x \cdot \ln x$  und die Gerade  $y = 2x - 4$  werden von der Vertikalen  $x = k$  geschnitten. Für welchen Wert von  $k$  hat die Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten minimale Länge?

13 Punkte

- 5) Echte Fussballfans fiebern der WM entgegen und sammeln PANINI-Bilder, die sie dann in ein Album kleben. Ich besitze zwei solche Alben, eines (A) ist bereits zu einem Drittel voll, das andere (B) erst zu einem Viertel. Wenn ich ein Bild einkleben möchte, gehe ich folgendermassen vor: Ich wähle zufällig eines der Alben aus und schaue nach, ob das entsprechende Bild im Album noch fehlt. Wenn's fehlt, klebe ich es ein, wenn's nicht fehlt, nehme ich das andere Album und klebe das Bild, wenn's fehlt, dort ein.

- Stelle mein Vorgehen in einem Baumdiagramm dar!
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich ein Bild in eines der Alben klebe?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich ein Bild ins Album A klebe?
- Ich habe gestern ein Bild eingeklebt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ins Album A?
- Die Firma PANINI behauptet, dass sich in mindestens 20% aller verkauften Bilderpakete ein Mannschaftsbild (Bild mit einer ganzen Mannschaft) befindet. Ich habe die Vermutung, dass dies seltener der Fall ist! Ich habe nämlich letzte Woche 40 Pakete gekauft und nur in zwei Paketen ein Mannschaftsbild vorgefunden.
  - Teste mit meiner Beobachtung auf dem 5%-Niveau, ob meine Vermutung zutrifft! (Hypothesen, Testgrösse, Verwerfungsbereich, Schlussfolgerung)
  - Wie gross ist die Macht des Tests bei dem gewählten Verwerfungsbereich, wenn tatsächlich nur in 10% aller Pakete ein Mannschaftsbild ist?

10 Punkte