

Grundlagenfach Mathematik

<i>Hilfsmittel:</i>	<i>Taschenrechner TI-89, Fundamentum Mathematik und Physik DMK/DPK</i>
<i>Bewertung:</i>	<i>Die Anzahl der Punkte pro Teilaufgabe ist jeweils angegeben (Gesamttotal: 42 Punkte).</i>
<i>Zeit:</i>	<i>4 Stunden</i>
<i>Dokumentation:</i>	<i>Vollständig, sauber und nachvollziehbar.</i>
<i>Formvorgaben:</i>	<i>Alle Ergebnisse sind exakt anzugeben, sofern keine speziellen Vorgaben gemacht werden.</i>
<i>Bemerkung:</i>	<i>Die Aufgabe 1 muss ohne Verwendung des Taschenrechners gelöst werden. Die Lösung ist abzugeben, bevor der Taschenrechner ausgehändigt wird.</i>

Aufgabe 1:

- a) Berechne die erste Ableitung der Funktion $y = f(x)$ und den Wert des gegebenen Integrals (*Ergebnisse vereinfachen*):

$$y = f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad \int_{-2}^4 x \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) dx \qquad [2 \text{ P.}]$$

- b) Löse das folgende Gleichungssystem nach x und y auf und gib die Lösungen an:

$$\begin{aligned} (1) \quad 2x + 3y - 3 &= 0 \\ (2) \quad 3xy + 2 &= 0 \end{aligned} \qquad [2 \text{ P.}]$$

- c) Von einer arithmetischen Folge mit n Gliedern kennt man das erste Glied $a_1 = -11$, die Differenz $d = \frac{2}{3}$ und das letzte Glied $a_n = 55$. Berechne die Anzahl Glieder und die Summe s_n dieser n Glieder. [2 P.]

- d) Löse die folgende Gleichung nach x auf: $\sqrt{3} \cdot 3^x = 3^{4x-1} \cdot 9^x$ [2 P.]

Aufgabe 2:

Die Funktion $y = f(x) = \frac{-x^3 + 5x^2 - 4}{2x^2}$ ist gegeben ($x \neq 0$). Ihr Graph sei die Kurve K .

- a) Diskutiere die Funktion (Nullstellen, Extremalwerte, Wendepunkte) und begründe, ob es sich bei den Extremalwerten um Maxima oder Minima handelt. Zeichne K im Bereich $-4 \leq x \leq 6$ und $-4 \leq y \leq 4$ möglichst genau (*Einheit $\cong 1 \text{ cm}$*). [4 P.]

- b) Bestimme die Gleichung derjenigen Tangente der Kurve K , welche parallel zur Geraden $g: 9x + 2y + 18 = 0$ ist. [3 P.]

- c) Die Kurve K und die drei Geraden mit den Gleichungen $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $x = 1$ und $x = t$ (für ein festes $t > 1$) begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(t)$.

Berechne $A(t)$. Für welchen Wert von t ist $A(t) = 1$? Berechne $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$. [2 P.]

Aufgabe 3:

Es sind die Punkte $A(6 \mid -2 \mid 3)$, $B(2 \mid 0 \mid 3)$ und $C(6 \mid 3 \mid 8)$ gegeben. ε bezeichnet die Ebene durch die Punkte A , B und C . Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe $h = 6$.

- Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenkelig ist, und berechne den Winkel γ (bei C im Dreieck ABC) (Resultat auf 3 Nachkommastellen gerundet). [2 P.]
- Berechne den spitzen Zwischenwinkel φ , den die Ebene ε mit der xy -Ebene einschliesst (Resultat auf 3 Nachkommastellen gerundet). [1 P.]
- Berechne die Koordinaten des Punktes D (auf der Kante durch A) der Deckfläche DEF des Prismas $ABCDEF$ (alle Lösungen angeben). [2 P.]
- Berechne das Volumen des Prismas $ABCDEF$. [2 P.]
- Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene ε mit der z -Achse. Untersuche, ob dieser Schnittpunkt S im Innern, auf dem Rand oder im Äusseren des Dreiecks ABC liegt. Begründe die Antwort stichhaltig. [2 P.]

Aufgabe 4:

An einer Klassenzusammenkunft nehmen 10 Damen und 6 Herren teil. Einer der Herren heisst Kurt.

Kurt ist ein guter Kegler. Seine Erfolgsquote, mit einem Wurf alle Kegel zu Fall zu bringen, beträgt 80%.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in sieben Versuchen jedes Mal alle Kegel zu Fall bringt? (Angabe in Prozent, auf 2 Nachkommastellen gerundet) [1,5 P.]
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in sieben Versuchen mindestens fünfmal alle Kegel zu Fall bringt? (Angabe in Prozent, auf 2 Nachkommastellen gerundet) [2,5 P.]

Nach dem Kegeln sitzen alle an einem runden Tisch. Kurt möchte dabei zwischen zweien der folgenden Damen sitzen: Linda, Milla, Sylvie, Vera.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies eintritt, wenn die Sitzordnung ausgelost wird? (Angabe in Prozent, auf 2 Nachkommastellen gerundet) [2 P.]

Zum Abschluss der Zusammenkunft gibt es noch eine Tanzgelegenheit.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Klassenzusammenkunft vier gemischt geschlechtliche Tanzpaare zu bilden? [2 P.]

Aufgabe 5: Drei unabhängige Teilaufgaben

- a) Spiegle den Punkt $P(9 \mid -1 \mid -7)$ an der Ebene $\varepsilon: 2x - y - 2z - 6 = 0$ und berechne die Koordinaten des gespiegelten Punktes. [2,5 P.]
- b) Bestimme die Gleichung eines Kreises, der durch die Punkte $A(5 \mid -4)$ und $B(-3 \mid 0)$ geht, und dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden der x - und der y -Achse (diejenige im 1. und 3. Quadranten) liegt. [2,5 P.]
- c) Die Figur zeigt die Graphen der beiden Funktionen $y = f(x) = 8x \cdot e^{-x}$ und $y = g(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$. Eine Gerade mit der Gleichung $x = u$ (für ein festes u mit $0 < u < 2$) schneidet die Graphen in den Punkten P und R . Für welchen Wert von u ist der Flächeninhalt des Dreiecks ORP am grössten? [3 P.]

