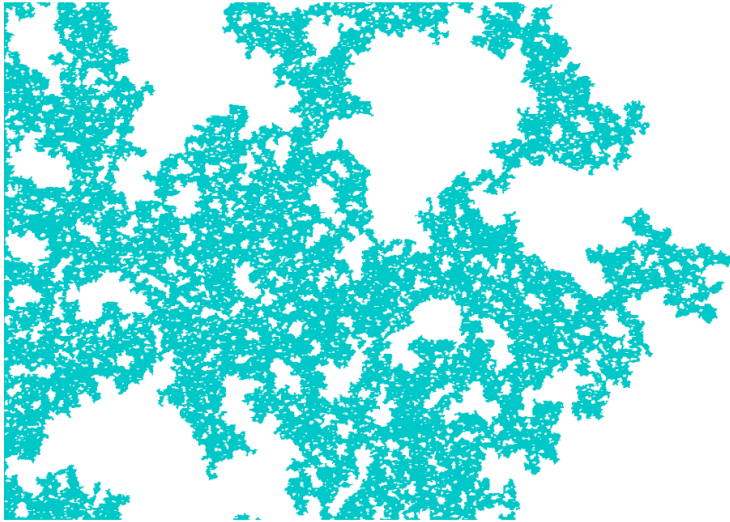


LAVORO DI MATURITÀ

LA PERCOLAZIONE
una teoria probabilistica



Autore:
Viola CATTANEO

Docente responsabile:
Prof. Christian FERRARI

LICEO CANTONALE DI LOCARNO, 2011-2012

Indice

1	Che cosa è la percolazione?	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Probabilità critica	6
1.3	Tipi di percolazione	6
1.4	Altri esempi di fenomeni di percolazione e possibili applicazioni	9
2	Il modello	12
3	Percolazione in una dimensione	14
4	Percolazione per il grafo \mathbb{Z}^2	16
4.1	Situazione con p vicino a 0	16
4.2	Situazione con p vicino a 1	18
4.3	Cluster infinito	22
4.4	Unicità del cluster	23
4.5	Proprietà generali di $\theta(p)$	25
4.6	Numero medio di vertici nei cluster	25
4.7	Alcuni risultati in \mathbb{Z}^d	26
4.8	Conclusioni	26
A	Teoria di probabilità	27
	Riferimenti bibliografici	30

1 Che cosa è la percolazione?

1.1 Introduzione

Il concetto di percolazione, in matematica, è apparso per la prima volta nel 1956. John Michael Hammersley, un matematico, lo propose come modello per descrivere in modo statistico le connessioni a lunga distanza di sistemi contenenti numerosi oggetti, collegati tra loro da relazioni aleatorie a corta distanza.

Un esempio classico di fenomeno di percolazione è quello di una pietra porosa immersa in acqua. Con il modello di percolazione si cerca di capire se il centro della pietra è bagnato. La pietra viene modellizzata come una grande ma finita sezione del grafo di \mathbb{Z}^2 (figura 1), in cui ogni tratto è aperto con probabilità p , con $p \in [0, 1]$.

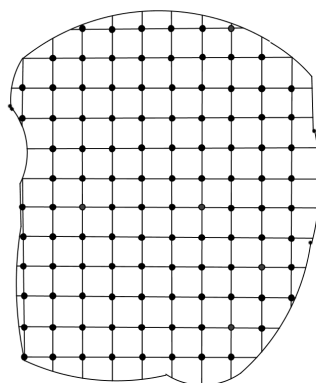


Figura 1: Schema in due dimensioni di una pietra porosa.

I tratti di \mathbb{Z}^2 rappresentano i passaggi interni della pietra porosa e p la proporzione tra quelli larghi abbastanza per permettere all'acqua di passarci e i passaggi totali. Tornando al problema di partenza, un vertice x all'interno della pietra è bagnato se e solo se esiste un percorso da x a un punto qualsiasi sulla superficie della pietra composto unicamente da tratti aperti.

La percolazione si concentra in particolare su come il valore di p modifica il sottografo casuale di \mathbb{Z}^2 che si forma cancellandone i tratti chiusi, quelli

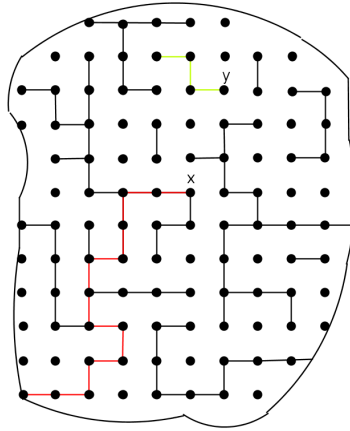
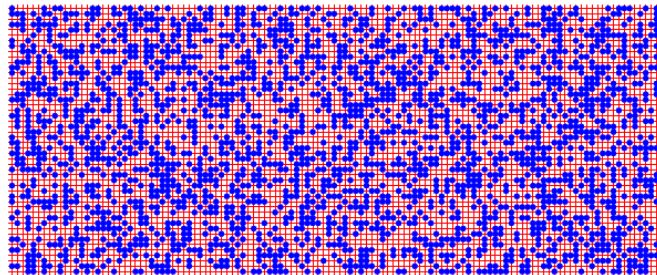


Figura 2: Schema senza i tratti chiusi.

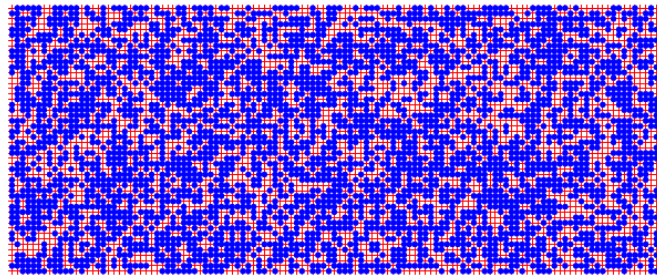
cioè attraverso i quali l'acqua non può passare (figura 2), infatti questa teoria si occupa principalmente dell'esistenza di cammini aperti.

Si può immaginare che il sistema formato dai passaggi interni della pietra sia di dimensioni trascurabili se confrontato con le dimensioni dell'intera pietra porosa, quindi, in date circostanze, la probabilità che un vertice vicino al centro della pietra sia bagnato sarà molto simile a quella che il vertice in questione sia l'ultimo vertice di un cammino infinito, partito da un qualsiasi vertice sulla superficie, composto unicamente da tratti aperti. Ciò implica che la penetrazione dell'acqua nella pietra è collegata all'esistenza di un cammino aperto di lunghezza infinita, chiamato anche cluster infinito.

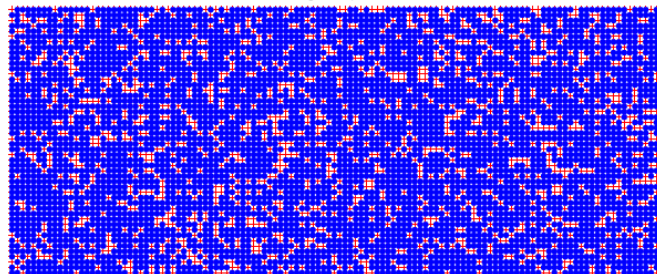
L'esistenza di un cammino infinito dipende dal valore di p . Come si può vedere anche dalle simulazioni (figura 3), più p è bassa, più i tratti aperti sono rari e isolati tra loro, mentre quando p aumenta, aumentano anche le dimensioni dei cammini aperti (ci sono più tratti aperti e quindi aumenta la probabilità di trovarne molti collegati tra loro). Con valori di p bassi tutti i cammini che si formano sono finiti, ma si osserva che dopo un certo valore di p esiste un cammino infinito. Questo cambiamento "macroscopico" è chiamato transizione di fase geometrica.



$p = 0,4$



$p = 0,6$



$p = 0,8$

Figura 3: Simulazioni. [7]

1.2 Probabilità critica

È necessario ora introdurre un concetto molto importante per la percolazione, quello di probabilità critica.

Come scritto sopra, si nota che dopo un certo valore di p esiste un cammino infinito di aperti, questo equivale a dire che esiste un valore critico p_c della probabilità p tale che per $p < p_c$ esistono solamente cammini finiti, mentre per $p > p_c$ esiste, con probabilità 1, un cammino infinito. Il valore della probabilità critica dipende dalla dimensione d del grafo, si scrive $p_c(d)$, con $d \geq 1$. Definiamo ora $\theta(p)$ come la probabilità di percolazione, cioè la probabilità che un dato vertice appartenga a un cammino infinito di aperti. La probabilità di appartenere a un cluster infinito è uguale per qualsiasi vertice (invarianza per traslazione), e di conseguenza, in genere, si prende come vertice l'origine.

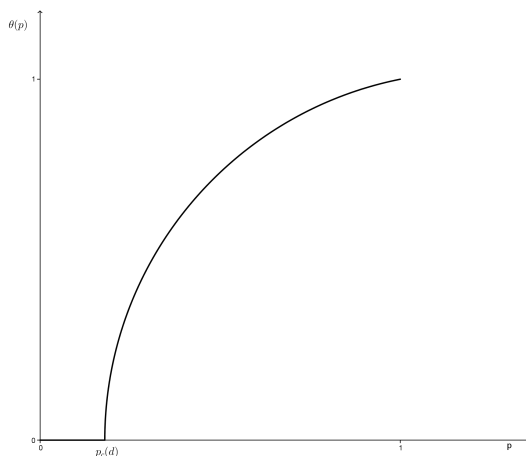


Figura 4: Grafico di $\theta(p)$ in funzione di p .

Evidentemente $\theta(p)$ è strettamente legato a p_c dato che

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p \leq p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c \end{cases}$$

Inoltre, la probabilità critica è formalmente definita come

$$p_c = \sup\{p \mid \theta(p) = 0\}.$$

1.3 Tipi di percolazione

Esistono due tipi di percolazione, quello dei punti (“sites model”) e quello dei tratti (“bond model”). Esaminiamo i due modelli utilizzando l’esempio

di un reticolo cubico con N vertici (punti). Supponiamo che il reticolo sia molto grande e che N tenda all'infinito.

Nel caso della percolazione dei punti i vertici sono dichiarati aperti o chiusi in modo casuale. È come se si mettessero N_1 particelle sui vertici del reticolo, al massimo una per punto. La probabilità p che un sito sia occupato è quindi $\frac{N_1}{N}$, in altre parole la proporzione tra punti aperti e punti totali. Un cammino aperto è definito come un insieme di punti con almeno un vertice adiacente aperto, cioè un insieme di particelle con almeno una vicina.

Nel secondo modello, invece, sono i tratti che possono essere aperti o chiusi in modo aleatorio. Riprendendo l'esempio delle particelle, ogni punto del reticolo ha una particella. Ognuna ha 6 vicine e quindi è collegata a 6 diversi tratti (per quelle in superficie, sia le particelle vicine sia i tratti adiacenti sono di meno). La probabilità p è la probabilità che un singolo tratto sia aperto. Un cammino aperto è definito come un insieme di tratti aperti collegati tra loro, vale a dire un insieme di particelle, in cui ognuna è collegata almeno a un'altra particella dello stesso insieme.

Esistono anche altri modelli di percolazione, ci sono modelli “misti”, in cui sia i punti che i tratti possono essere chiusi o aperti; modelli “disomogenei”, in cui tratti diversi possono avere probabilità differenti di essere aperti; modelli “dipendenti”, in cui le situazioni di tratti diversi non sono sempre indipendenti, e molti altri.

Il valore della probabilità critica p_c dipende sia dalle dimensioni del reticolo (unidimensionale, bidimensionale, tridimensionale, ...), sia dal modello di percolazione. Nella seguente tabella 1 si vedono le variazioni di p_c a seconda della dimensione del reticolo e del modello di percolazione (dei punti o dei tratti) per un reticolo del tipo \mathbb{Z}^d . Ad esempio, si può notare come il valore di p_c per la percolazione per tratti è, in generale, minore di quello per la percolazione dei punti.

Dimensione d	Punti (p_c)	Tratti (p_c)
2	0,593	0,500
3	0,311	0,249
4	0,197	0,160
5	0,141	0,118

Tabella 1: La probabilità p_c in funzione della dimensione per i due modelli.

Il valore della probabilità critica dipende anche dalla natura del reticolo. Infatti, un reticolo, ad esempio bidimensionale, può essere quadrato, trian-

golare, esagonale (figura 5), ...

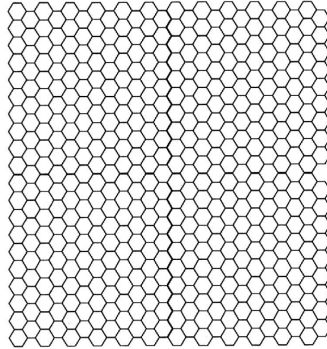


Figura 5: Grafo esagonale. [13]

La seguente tabella 2 mostra, appunto, come varia la probabilità critica (nei due principali modelli di percolazione) per i vari tipi di reticolo bidimensionali. Anche in questo caso, il valore p_c per la percolazione per tratti è minore di quello per la percolazione per punti.

Reticolo	Punti (p_c)	Tratti (p_c)
Quadrato	0,593	0,500
Triangolare	0,500	0,347
Esagonale	0,696	0,653

Tabella 2: La probabilità p_c in funzione del tipo di reticolo per i due modelli.

Nei capitoli seguenti si considererà unicamente il modello di percolazione dei tratti (“bond model”), applicato a un reticolo quadrato, in varie dimensioni, ossia \mathbb{Z}^d .

1.4 Altri esempi di fenomeni di percolazione e possibili applicazioni

Conduzione di corrente elettrica.

Si ha una scatola cubica dalle pareti isolanti, a parte due elettrodi che si trovano su due pareti opposte. La si riempie con piccole biglie sferiche di due materiali diversi: certe sono fatte di un materiale che conduce l'elettricità (come il rame), altre sono isolanti (come la plastica isolante). La probabilità p , in questo caso, è la probabilità che una biglia sia conduttrice.

Nell'esempio del sasso poroso la domanda che ci si poneva era se il centro della pietra fosse bagnato, in questo caso invece la domanda a cui si cerca di rispondere è se la corrente elettrica iniettata da un elettrodo raggiunge l'altro, cioè se c'è un flusso di corrente tra i due, e in che modo il valore di p influenza questo fenomeno. Si misura quindi se la corrente passa oppure no, in funzione di p .

Anche in questa situazione, in determinate circostanze, le dimensioni delle singole sfere sono trascurabili rispetto alle dimensioni dell'intero contenitore, e quindi si può dire che la probabilità di avere un flusso di corrente tra i due elettrodi corrisponde a quella di avere un cammino infinito di sfere conduttrici che congiunga due pareti opposte. Nella situazione in cui $p = 0$ ci sono solo sfere isolanti e di conseguenza la corrente non passerà. Altrettanto evidentemente, se $p = 1$ ci sono solo sfere conduttrici e quindi la corrente passerà. Facendo aumentare il valore di p da 0 a 1 ci deve quindi essere una transizione da uno stato isolante a uno conduttore. Se si effettua concretamente l'esperienza si nota che la transizione è repentina, e che avviene per un valore p ben preciso: riappare qui il concetto di probabilità critica.

Questo è chiaramente un esempio di fenomeno di percolazione dato che mette in relazione le connessioni delle singole sfere con una connessione a grande distanza (quella tra i due elettrodi).

Epidemie e incendi.

Nel 1963, H.L.Frisch e J.M.Hammersley proposero di usare la percolazione per modellizzare la diffusione di incendi o di malattie infettive in un frutteto, dove cioè gli alberi sono disposti in modo regolare. Gli alberi vengono infatti rappresentati come i vertici di un reticolo (figura 6), e si ipotizza che ci sia una probabilità p , corrispondente alla probabilità che un albero sano sia contagiato da uno adiacente e affetto.

La probabilità p è una funzione conosciuta della distanza tra alberi adiacenti. Infatti, p è indirettamente proporzionale alla distanza tra un albero e l'altro: più due alberi sono distanti, più è bassa la probabilità che il fuoco, o la ma-

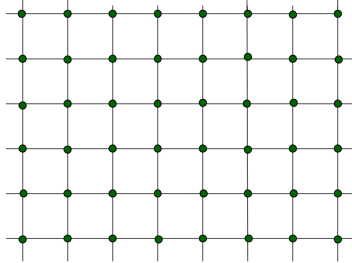


Figura 6: Schema di un frutteto.

lattia infettiva, passi da uno all'altro. Per scongiurare che un singolo albero affetto metta in pericolo una porzione significativa del frutteto, è necessario che i vertici del reticolo siano sufficientemente distanziati, così da avere p minore della probabilità critica della percolazione in \mathbb{Z}^2 .

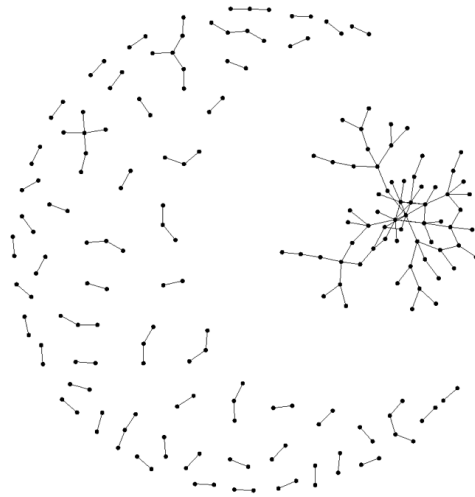


Figura 7: Diffusione di un'epidemia. [14]

A questo modello si possono aggiungere altri elementi per formulare un modello più complesso che tenga conto di più fattori. In un incendio, ad

esempio, gli alberi che sono già completamente bruciati non rappresentano più un pericolo per i loro vicini, così come, durante un'epidemia, gli alberi che sono guariti dalla malattia probabilmente avranno sviluppato delle difese contro l'infezione. Queste osservazioni possono essere integrate in un modello che tenga conto anche dello scorrere del tempo.

Si considera ora, per semplicità, solamente il caso dell'incendio. Ogni albero può trovarsi a tre diversi stadi: può essere vivo e non infiammato (1), può essere in fiamme (0) o può essere già bruciato (-1). Si suppone che l'albero al vertice x bruci per un tempo T_x dopo aver preso fuoco, dove $(T_x \mid x \in \mathbb{Z}^2)$ è una famiglia di variabili aleatorie e indipendenti. Un albero incendiato emette scintille, e ogni scintilla può colpire un albero adiacente, in modo casuale. Se al tempo 0 qualcuno dà fuoco all'albero all'origine, allora l'insieme C di tutti gli alberi che sono bruciati dopo un certo tempo possono essere rappresentati come l'insieme di vertici che sono raggiungibili da cammini aperti, di un qualche processo di percolazione, con partenza all'origine.

Questo processo di percolazione è diverso da quello solito, in quanto, in questo caso, le situazioni di due vertici (alberi) diversi possono essere dipendenti se questi hanno un vertice adiacente in comune.

Caffè.

La produzione di caffè in una caffettiera (anche detta "percolateur" in francese) è un fenomeno di percolazione. L'acqua deve attraversare uno strato di caffè compresso. Il cammino è quindi definito come il percorso che l'acqua riesce a fare attraverso il caffè. Se il caffè è molto compresso, il cammino più lungo è molto minore dello strato da attraversare, quindi l'acqua non può passare e non si ha del caffè. In questo caso si è al di sotto della soglia di percolazione, vale a dire che $p < p_c$, dove p è una funzione conosciuta della non-compattanza del caffè. Se, invece, si è al di sopra di questo valore, il cammino percorso dall'acqua si sviluppa su tutto lo spessore del caffè, e l'acqua riesce quindi ad attraversarlo. La qualità del caffè prodotto dipende dalla facilità con cui l'acqua passa attraverso il caffè: se è troppo facile il caffè sarà troppo diluito. Per far sì che sia il più concentrato possibile, p deve essere appena superiore a p_c , ci si deve trovare, cioè, subito sopra la soglia di percolazione.

Uovo sodo.

In una transizione soluzione-gel si passa, appunto, da una soluzione, quindi un liquido con caratteristiche classiche, a un gel, che resiste a un trazione. Un classico esempio di questa transizione è quello della trasformazione di un

uovo crudo in un uovo sodo, ma la si può osservare anche quando si utilizza della gelatina, o in una reazione di polimerizzazione. In una transizione soluzione-gel le proprietà meccaniche di un sistema cambiano bruscamente quando ci si trova alla soglia della percolazione, vale a dire una volta raggiunto il valore della probabilità critica p_c .

Pernod.

Il Pernod è un liquore francese all'anice, che a contatto con l'acqua passa da trasparente a opaco. Questo cambiamento può essere considerato un fenomeno di percolazione. Infatti, se a un bicchiere di Pernod si aggiungono piccole quantità d'acqua il liquido mantiene perfettamente la sua trasparenza, ma se si continua ad aggiungerne goccia a goccia a un certo punto, improvvisamente, diventa opaco.

In generale, il concetto di percolazione si può applicare a molti fenomeni, in particolare alle transizioni di fase. La percolazione permette di capire cosa succede in numerosi casi, anche se, rappresentando un approccio puramente matematico e geometrico, non descrive tutti gli aspetti di un fenomeno.

2 Il modello

Essendo la percolazione una teoria probabilistica è necessario introdurre un modello di probabilità, vale a dire determinare lo spazio probabilistico (Ω, \mathcal{F}, P) .

Spazio campionario

Abbiamo

$$\mathbb{Z}^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \mid \forall 1 \leq i \leq d, x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

I tratti tra i punti sono i segmenti di lunghezza 1 tra punti adiacenti, ossia $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tali che

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1.$$

Ogni tratto $b = b(x, y)$ può essere, indipendentemente dagli altri, aperto, con probabilità p , o chiuso, con probabilità $1 - p$, dove $p \in [0, 1]$. Si nota

$$\omega_b = \begin{cases} 1 & \text{se il tratto è aperto} \\ 0 & \text{se il tratto è chiuso} \end{cases}$$

Dato che gli eventi elementari, cioè che i singoli tratti siano aperti, sono indipendenti, ci si trova in uno spazio prodotto, in cui lo spazio campionario Ω è definito nel modo seguente:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \times \cdots$$

Nel caso della percolazione, visto che ogni tratto può essere aperto o chiuso, lo spazio campionario di un singolo tratto è

$$\Omega_b = \{0, 1\},$$

per ogni tratto appartenente a B^d , l'insieme di tutti i tratti di \mathbb{Z}^d . Di conseguenza si definisce lo spazio campionario come

$$\Omega = \prod_{b \in B^d} \{0, 1\}.$$

Insieme degli eventi

Per identificare la σ -algebra degli eventi \mathcal{F} , si utilizza un teorema di probabilità che afferma che da qualsiasi sottoinsieme $G \subset \mathcal{P}(\Omega)$ è possibile generare una σ -algebra, notata $\sigma(G)$.

L'insieme degli eventi \mathcal{F} è definito come la σ -algebra generata dall'insieme degli eventi cilindri, notato \mathcal{C} :

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C}).$$

Gli eventi cilindri sono dei sottoinsiemi di $\{0, 1\}^\infty$, dove $\{0, 1\}^\infty$ è l'insieme delle successioni di 0 e 1. I sottoinsiemi di $\{0, 1\}^\infty$ che ci interessano sono degli insiemi di successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, caratterizzati dal fatto di avere un numero finito m di loro componenti fissato:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\omega_{b_1} = x_1, \omega_{b_2} = x_2, \cdots, \omega_{b_m} = x_m, \omega_{b_{m+1}}, \cdots),$$

con $x_i \in \{0, 1\}$.

Misura di probabilità

Dato che, come già detto ci si trova in uno spazio prodotto è possibile definire la misura di probabilità come la misura di probabilità prodotto, vale a dire:

$$P = P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_n \otimes \cdots$$

Nel caso della percolazione, le singole misure di probabilità P_n , si definiscono come la misura di Bernouilli per ogni singolo tratto:

$$\mu_b(\omega_b) = \begin{cases} p & \text{se } \omega_b = 1 \\ 1 - p & \text{se } \omega_b = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza la misura di probabilità del modello di percolazione è

$$P = \prod_{b \in B^d} \mu_b.$$

In altre parole, la misura di probabilità è definita come il prodotto della misura di Bernoulli per ogni tratto.

3 Percolazione in una dimensione

In una sola dimensione la probabilità che ci sia un cluster infinito aperto è zero se la probabilità che ogni singolo tratto sia aperto è minore di uno.

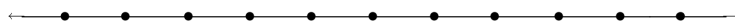


Figura 8: \mathbb{Z}^1 come grafo della percolazione unidimensionale.

Infatti, un cluster infinito aperto, in una dimensione, implica forzatamente che ogni singolo tratto sia aperto, come si può facilmente notare osservando la figura 8. Ciò significa che la probabilità p deve essere uguale a 1, e quindi anche il valore della probabilità critica (cioè il valore minimo della probabilità di avere un singolo tratto aperto sufficiente per avere un cluster infinito aperto) per la percolazione unidimensionale deve essere 1.

Dimostriamo ora questo risultato.

Teorema 1. *La probabilità critica per il modello di percolazione su un grafo unidimensionale, ossia \mathbb{Z}^1 , è*

$$p_c(1) = 1.$$

Dimostrazione. Sia A_k l'evento "Tutti i segmenti tra i punti 2^k e 2^{k+1} e tra -2^{k+1} e -2^k sono aperti."

Il numero di segmenti tra i punti 2^k e 2^{k+1} è 2^k , come è dimostrato per induzione qui di seguito.

Se $k = 0$

$$2^{k+1} - 2^k = 2^1 - 2^0 = 2^0 = 1$$

Ipotesi di induzione: se $k = n$, allora

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n.$$

Se $k = n + 1$:

$$2^{n+2} - 2^{n+1} = 2(2^{n+1} - 2^n) \stackrel{IP.IND.}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Lo stesso vale per i segmenti tra i punti -2^{k+1} e -2^k .

Grazie al principio di moltiplicazione, la probabilità dell'evento A_k corrisponde al prodotto delle probabilità di avere la parte destra (tra 2^k e 2^{k+1}), e rispettivamente la sinistra (tra -2^{k+1} e -2^k), aperte, quindi:

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\text{parte D aperta}) \cdot P(\text{parte S aperta}) \\ &= \overbrace{(ppp \cdots p)}^{2^k \text{ volte}} \overbrace{(ppp \cdots p)}^{2^k \text{ volte}} \\ &= p^{2^k} p^{2^k}. \end{aligned}$$

Si ottiene un cluster infinito solamente se l'evento A_k si realizza per un numero infinito di k . Questo evento, che chiamiamo E , si nota nel modo seguente:

$$E = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup A_k.$$

Abbiamo

$$\theta(p) = P\{|C| = \infty\} = P(E).$$

Calcoliamo $P(E)$ in funzione di p . Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (p^{2^k})^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{(2^{k+1})}$$

quindi, se $p = 1$, la serie diverge

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = +\infty,$$

mentre, se $p < 1$, allora la serie converge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty.$$

Si può perciò applicare il lemma di Borel-Cantelli (vedi appendice A) che afferma che, se $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_n) < \infty$, allora

$$P(E) = 0.$$

Ciò significa che, se $p < 1$, allora $P(E) = \theta(p) = 0$ e che, con probabilità 1, esiste almeno un k per il quale A_k non si realizza: quindi con $p < 1$ la probabilità di avere un cluster infinito di aperti è 0.

Chiaramente se $p = 1$ tutti i tratti sono aperti e quindi $\theta(p) = 1$. La probabilità critica vale quindi $p_c = 1$. \square

4 Percolazione per il grafo \mathbb{Z}^2

La probabilità critica per la percolazione in due dimensioni è $\frac{1}{2}$, ma, visto che dimostrarlo è molto lungo e complesso, in questo lavoro ci limitiamo a dimostare un suo limite inferiore e uno superiore.

4.1 Situazione con p vicino a 0

È possibile dimostare che se la probabilità p di un singolo tratto di essere aperto è vicina allo zero, per la precisione minore di $\frac{1}{3}$, la probabilità di avere un cluster infinito aperto all'origine è nulla, di conseguenza la probabilità critica deve essere superiore a questo valore.

Teorema 2. *Sia il grafo \mathbb{Z}^2 . Se $p < \frac{1}{3}$ allora $\theta(p) = 0$, quindi $p_c \geq \frac{1}{3}$.*

Dimostrazione. Sia A l'evento $\{|C| = +\infty\}$. Introduciamo ora il concetto di self avoiding walk (SAW). Un SAW è un cammino aleatorio che passa al massimo una volta per un vertice. Sia F_n l'evento "Avere almeno un SAW di lunghezza n aperto."

Allora

$$F_n \supseteq A.$$

Sia N la variabile aleatoria che indica il numero di cammini SAW lunghi n aperti, allora

$$P(A) \leq P(F_n) = P(N \geq 1)$$

Introduciamo ora una funzione indicatrice di un sottoinsieme C di \mathcal{F} , cioè una funzione del tipo

$$\begin{aligned} 1_C : \mathcal{F} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\longmapsto 1_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \in A^c \end{cases} \end{aligned}$$

In questo caso prendiamo come evento di \mathcal{F} l'evento B_k "Il cammino, SAW e lungo n , numero k è aperto.", abbiamo

$$N(\omega) = \sum_{k=1}^{\sigma(n)} 1_{B_k}(\omega),$$

con $\sigma(n)$ corrispondente al numero di cammini (aperti e chiusi, non importa) SAW e di lunghezza n dall'origine.

Infatti 1_{B_k} dà 1 per ogni cammino SAW e lungo n aperto, quindi, sommando

i valori della funzione indicatrice per ogni k possibile, si ottiene il numero totale di questi cammini.

Dalla disuguaglianza di Markov (vedi appendice A):

$$P(A) \leq P(F_n) = P(N \geq 1) \leq \mathbb{E}(N)$$

Per linearità:

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\sigma(n)} \mathbb{E}(1_{B_k})$$

Dalla definizione di funzione indicatrice:

$$\mathbb{E}(1_{B_k}) = \underbrace{0 \cdot P(B_k^c)}_0 + 1 \cdot P(B_k) = P(B_k)$$

Da cui:

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\sigma(n)} \mathbb{E}(1_{B_k}) = \sum_{k=1}^{\sigma(n)} \underbrace{P(B_k)}_{p^n} = \sigma(n) \cdot p^n$$

E quindi

$$P(A) \leq \mathbb{E}(N) = \sigma(n) \cdot p^n.$$

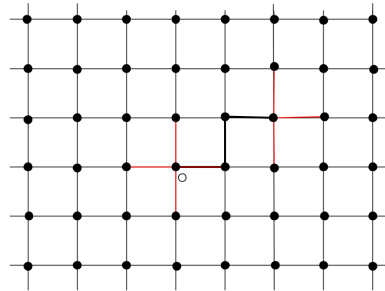


Figura 9: SAW e calcolo di $\sigma(n)$.

Il SAW, come si nota nella figura 9, al punto di partenza può prendere quattro diverse direzioni (ci sono quattro tratti per cui potrebbe passare),

mentre in tutti i punti seguenti le possibilità si riducono a tre, visto che si tratta di un SAW e quindi non può ripassare sul tratto con cui è arrivato a quel punto, per cui

$$\sigma(n) = 4 \cdot 3^{n-1}$$

e

$$\sigma(n) \cdot p^n = 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = \frac{4}{3} \cdot (3p)^n.$$

Poichè, per ipotesi, $p < \frac{1}{3}$, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} \cdot (3p)^n = 0.$$

Quindi:

$$\theta(p) = P(A) \leq \frac{4}{3} \cdot (3p)^n,$$

per ogni n . Di conseguenza

$$P(A) = 0$$

e quindi se $p < \frac{1}{3}$ si ha $\theta(p) = 0$. □

4.2 Situazione con p vicino a 1

Si cerca adesso di limitare superiormente il valore della probabilità critica per la percolazione in due dimensioni. Si dimostra che se la probabilità che un singolo tratto (p) sia aperto è maggiore di $\frac{2}{3}$, la probabilità di percolazione, $\theta(p)$, è maggiore di zero. Di conseguenza la probabilità critica è inferiore a questo valore.

Teorema 3. *Sia il grafo \mathbb{Z}^2 . Se $p > \frac{2}{3}$ allora $\theta(p) > 0$, quindi $p_c \leq \frac{2}{3}$.*

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema è prima di tutto necessario introdurre il concetto di grafo duale (figura 10). Per \mathbb{Z}^2 il grafo duale è \mathbb{Z}_d^2 , che non è altro che \mathbb{Z}^2 traslato di $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, cioè $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Tra i punti di \mathbb{Z}^2 e quelli del suo duale c'è una corrispondenza 1-1 e i tratti si incrociano al loro centro. Un tratto appartenente al duale \mathbb{Z}_d^2 è aperto se incrocia un tratto di \mathbb{Z}^2 aperto, è invece chiuso se ne incrocia uno chiuso.

Come conseguenza, se l'origine (o un qualsiasi altro punto) di \mathbb{Z}^2 fa parte di un cluster finito di aperti, ciò significa che è circondata da un circuito di tratti chiusi in \mathbb{Z}_d^2 , come nell'esempio della figura 11.

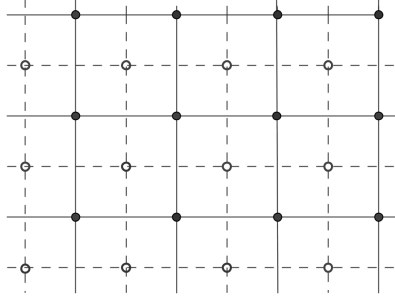


Figura 10: Grafo duale.

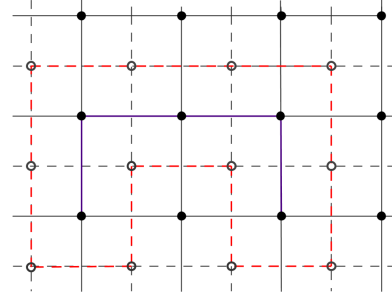


Figura 11: Circuito che circonda l'origine.

Definiamo la variabile aleatoria M_n che indica il numero di circuiti chiusi in \mathbb{Z}_d^2 di lunghezza n che circonda l'origine $O \in \mathbb{Z}^2$. Allora, se definiamo l'evento $A = \{|C| = +\infty\}$, si ha

$$P(A^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (M_n \geq 1)\right).$$

Sia $\gamma(n)$ il numero di circuiti in \mathbb{Z}_d^2 (aperti o chiusi, non importa) di lunghezza n che circondano l'origine di \mathbb{Z}^2 .

Tutti questi circuiti, visto che devono circondare l'origine di \mathbb{Z}^2 , devono passare per un punto $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, con $0 \leq k < n$.

Grazie alla disuguaglianza di Boole (vedi appendice A):

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (M_n \geq 1)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n \geq 1).$$

Dalla disuguaglianza di Markov (vedi appendice A):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n \geq 1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(M_n \geq 1)$$

Si può esprimere M_n come somma di funzioni indicatrici. In questo caso, l'evento di \mathcal{F} è T_k "Il cammino in \mathbb{Z}_d^2 SAW, lungo n e che circonda O , numero k è chiuso". In questo modo:

$$M_n = \sum_{k=1}^{\gamma(n)} 1_{T_k}.$$

E quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(M_n \geq 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\gamma(n)} \mathbb{E}(1_{T_k}) \right)$$

Abbiamo $\mathbb{E}(1_{T_k}) = P(T_k)$, quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\gamma(n)} \mathbb{E}(1_{T_k}) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\gamma(n)} \underbrace{P(T_k)}_{(1-p)^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma(n)(1-p)^n$$

Dato che $P(|C| < +\infty) = P(A^c) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (M(n) \geq 1))$, allora

$$P(|C| < +\infty) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma(n)(1-p)^n.$$

Cerchiamo di trovare un limite superiore a $\gamma(n)$.

I circuiti SAW che circondano l'origine in \mathbb{Z}_d^2 devono essere lunghi $n-1$ (e non n , perché al tratto numero n il circuito si chiude su sé stesso, passando perciò due volte per lo stesso punto e quindi non sarebbe più SAW). Il tutto si moltiplica per n perché ogni circuito può iniziare da n diversi punti di \mathbb{Z}_d^2 , al contrario dei cammini contati da $\sigma(n)$ che hanno l'origine come punto di partenza fissato.

Quindi

$$\gamma(n) \leq n\sigma(n-1),$$

Possiamo scrivere:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma(n)(1-p)^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n\sigma(n-1)(1-p)^n$$

Dalla dimostrazione del punto 4.1 si sa che $\sigma(n) = 4 \cdot 3^{n-1}$ e dunque

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma(n)(1-p)^n &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 4 \cdot 3^{n-2} (1-p)^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 3^n (1-p)^n \end{aligned}$$

Chiamiamo (x_n) la successione

$$x_n = n \cdot 3^n (1-p)^n.$$

Si usa il criterio di d'Alembert per sapere per quali p la serie di termine x_n converge.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1} (1-p)^{n+1}}{n \cdot 3^n (1-p)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1} (1-p)^{n+1}}{n \cdot 3^n (1-p)^n} \\
 &= 3(1-p)
 \end{aligned}$$

La serie converge se

$$L = 3(1-p) < 1$$

e quindi per

$$p > \frac{2}{3}.$$

E dato che

$$\begin{aligned}
 P(A) = P(|C| = +\infty) = 1 - P(|C| < +\infty) &\geq 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma(n) (1-p)^n \\
 &\geq 1 - \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 3^n (1-p)^n,
 \end{aligned}$$

allora $P(A) > 0$ se la serie $\frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 3^n (1-p)^n$ converge a un numero strettamente minore di 1.

Questo si può verificare, infatti, grazie a Maple, si ottiene

$$\frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 3^n (1-p)^n = \frac{4}{3} \frac{1-p}{(3p-2)^2}$$

Ad esempio, il valore per cui $p > \frac{2}{3}$ e

$$\frac{4}{3} \frac{1-p}{(3p-2)^2} = \frac{1}{2}$$

è

$$p = \frac{14}{27} + \frac{2}{27} \sqrt{22}$$

vale a dire, approssimando questo valore,

$$p = 0.87.$$

Questo è un esempio di come, con $p > \frac{2}{3}$, la serie converga a un numero minore di 1.

Quindi se $p > \frac{2}{3}$, allora $\theta(p) > 0$, di conseguenza $p_c \leq \frac{2}{3}$. □

4.3 Cluster infinito

Teorema 4. *La probabilità che esista almeno un cluster infinito nel grafo \mathbb{Z}^2 è 1 se $\theta(p) > 0$ e 0 se $\theta(p) = 0$.*

Dimostrazione. L'esistenza di almeno un cammino infinito è un evento asintotico, notato A_∞ , dato che il cambiamento di stato di un numero finito di tratti (cioè da aperti diventano chiusi, o viceversa) non influenza la sua realizzazione: infatti se un numero finito di tratti di un cammino infinito aperto diventano chiusi, il cammino resta infinito.

Si può perciò applicare la legge 0 – 1 di Kolmogorov (vedi appendice A), e quindi $P(A_\infty) = 0$ o $P(A_\infty) = 1$.

Ora, se $\theta(p) > 0$, cioè se $p > p_c$,

$$P(A_\infty) = P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{| C(i) | = \infty\}\right) \geq P(| C(0) | = \infty) = \theta(p) > 0$$

e quindi, necessariamente, $P(A_\infty) = 1$.

L'altra parte del teorema si dimostra in modo analogo. Grazie alla disegualianza di Boole (vedi appendice A) si ha

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{| C(i) | = \infty\}\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} P(\{| C(i) | = \infty\}).$$

E visto che, se $p < p_c$, $\theta(p) = 0$, utilizzando l'invarianza per traslazione

$$P(\{| C(i) | = \infty\}) = P(\{| C(0) | = \infty\}) = \theta(p) = 0,$$

allora

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{| C(i) | = \infty\}\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} P(\{| C(i) | = \infty\}) = 0.$$

E quindi

$$P(A_\infty) = 0.$$

□

4.4 Unicità del cluster

Una delle domande che sorgono più naturalmente quando si pensa al fenomeno della percolazione è la seguente: supponendo che esiste un cluster infinito, quanti ce ne possono essere?

La risposta a questa domanda è uno solo. In questa sezione ci limiteremo a dimostrare che, supponendo che il numero di cluster infiniti sia finito, questo numero può essere solamente 1. Non dimostreremo, invece, che non possono esistere infiniti cluster infiniti.

Teorema 5. *Sia U l'evento "Esiste un unico cluster infinito.". Se $\theta(p) > 0$, allora $P(U) = 1$.*

Dimostrazione. L'evento U è invariante per traslazione, poichè la sua realizzazione è indipendente dalla scelta dell'origine, possiamo quindi applicare la seconda legge 0 – 1 (vedi appendice A). A titolo di esempio gli eventi "Esiste un cluster infinito", oppure "Esistono k cluster infiniti" sono altri esempi di eventi invarianti per traslazione, non lo è l'evento $\{|C(0)| = \infty\}$.

Sia E_k l'evento "Il numero di cluster infiniti è k .", per ogni $k \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$, allora $P(E_k) = 0$ o $P(E_k) = 1$, per ogni k .

Per dimostrare che, supponendo che il numero di clusters infiniti sia finito, questo numero può essere solamente l'1, è quindi sufficiente dimostrare che per ogni $k \in \{2, 3, \dots\}$, $P(E_k) \neq 1$.

La dimostrazione è uguale per ogni k ed è svolta per assurdo. Supponiamo che $P(E_k) = 1$ per un dato $2 \leq k < \infty$, poichè sono eventi di probabilità 0 o 1 si avrà $P(E_1) = 0$.

Dato $M > 0$, sia F_M l'evento "Ci sono k cluster infiniti e ognuno interseca $[-M, M]^2$ ". Si nota che la successione di eventi (F_n) è crescente

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$$

e che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = E_k .$$

Di conseguenza, per la continuità delle probabilità,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n) = P(E_k) = 1 .$$

Sia quindi N scelto tale che $P(F_N) > 0$ e sia \tilde{F}_N l'evento "Tutti i k cluster infiniti toccano il bordo di $[-N, N]^2$ ".

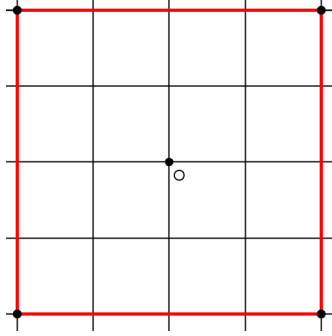


Figura 12: L'insieme $[-2, 2]^2$.

Questi clusters infiniti sono contenuti nel grafo $\mathbb{Z}^2 \setminus [-N, N]^2$, e quindi l'evento \tilde{F}_N dipende solo dai tratti all'esterno di $[-N, N]^2$.

Dato che per F_N i clusters infiniti intersecano $[-N, N]^2$, mentre per \tilde{F}_N è sufficiente che tocchino l'intervallo, allora

$$F_N \subset \tilde{F}_N,$$

quindi

$$P(F_N) \leq P(\tilde{F}_N)$$

da cui

$$P(\tilde{F}_N) > 0.$$

Sia G l'evento "Tutti i tratti di $[-N, N]^2$ sono aperti.". Gli eventi G e \tilde{F}_N sono indipendenti e

$$P(G \cap \tilde{F}_N) = \underbrace{P(G)}_{p^{(N^2)}} \underbrace{P(\tilde{F}_N)}_{>0} > 0.$$

Dato che in G tutti i tratti sono aperti, l'evento $G \cap \tilde{F}_N$ contiene un solo cluster infinito: i clusters infiniti di \tilde{F}_N , a contatto con i tratti aperti di $[-N, N]^2$, si collegano tra loro e diventano un unico cluster infinito. Di conseguenza:

$$G \cap \tilde{F}_N \subseteq E_1,$$

da cui

$$P(E_1) \geq P(G \cap \tilde{F}_N) > 0.$$

Questo è in contraddizione con l'ipotesi di partenza per cui $P(E_k) = 1$ e $P(E_1) = 0$. Quindi $P(E_k) = 0$ per ogni $2 \leq k < \infty$.

□

4.5 Proprietà generali di $\theta(p)$

Qui di seguito sono elencate alcune importanti caratteristiche della funzione di percolazione $\theta(p)$ (grafico a pagina 6), senza però essere dimostrate.

Teorema 6. *La funzione $\theta(p)$ soddisfa:*

1. è una funzione non decrescente di p ;
2. è continua sugli intervalli $[0, p_c[$ e $]p_c, 1[$, ed è continua a destra in p_c ;
3. è nulla in 0 e vale 1 in 1.

Il punto 1 di questo teorema è confermato dal fatto che l'aumento della probabilità che un dato tratto sia aperto fa crescere la probabilità di percolazione.

4.6 Numero medio di vertici nei cluster

Un risultato interessante, che concerne il modello di percolazione per tratti, è quello che riguarda le dimensioni dei cluster aperti passanti per l'origine, rispetto al valore della probabilità p .

Il numero medio di vertici nei cammini aperti passanti per l'origine, in funzione di p , equivale a:

$$\chi(p) = \mathbb{E}(|C|).$$

Grazie all'invarianza per traslazione si può scrivere che $\chi(p) = \mathbb{E} |C(x)|$ per ogni vertice x .

Per definizione di valore medio

$$\chi(p) = \infty \cdot P(|C| = \infty) + \sum_{n=1}^{\infty} nP(|C| = n) = \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} nP(|C| = n).$$

Da cui

$$\chi(p) = \infty \text{ se } p > p_c.$$

L'inverso, vale a dire che $\chi(p) < \infty$ se $p < p_c$, non è per niente scontato, ma è possibile dimostrare che è effettivamente così. Questo mostra come sia θ sia χ , entrambe grandezze macroscopiche, hanno la soglia del comportamento critico allo stesso valore p_c .

4.7 Alcuni risultati in \mathbb{Z}^d

Riportiamo a titolo informativo alcuni risultati per la percolazione in \mathbb{Z}^d , dove $d \geq 2$.

- La funzione $\theta(p) = \theta_d(p)$ è non-decrescente in d , e quindi

$$p_c(d+1) \leq p_c(d),$$

per $d \geq 1$.

Una possibile spiegazione è che il reticolo d -dimensionale \mathbb{Z}^d può essere considerato come una proiezione di \mathbb{Z}^{d+1} in un sottografo generato dalle prime d coordinate. Con questa inclusione, se l'origine appartiene a un cluster infinito nel sottografo \mathbb{Z}^d , allora apparterrà a un cluster infinito anche nel grafo \mathbb{Z}^{d+1} .

- La probabilità critica soddisfa

$$0 < p_c(d) < 1.$$

4.8 Conclusioni

In questa sezione abbiamo trattato diversi aspetti della percolazione per tratti in due dimensioni. Da questa analisi si può chiaramente notare come esistano due fasi per la percolazione, caratterizzate, dal punto di vista macroscopico, da una diversità dal punto di vista geometrico. Vi è infatti una fase subcritica, quando cioè $p < p_c$ per la quale non esiste un cluster infinito, e una fase supercritica, quando $p > p_c$ per la quale esiste un unico cluster infinito. Inoltre, non si deve dimenticare il processo di percolazione al punto critico, quando cioè $p = p_c$, valore della probabilità per il quale si osserva la transizione di fase geometrica.

A Teoria di probabilità

Teorema 7. Sia B_k una successione crescente di eventi in \mathcal{F} e convergente a $B \in \mathcal{F}$, cioè

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \dots$$

e

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k = B.$$

Allora

$$P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n).$$

Teorema 8. Sia B_k una successione decrescente di eventi in \mathcal{F} e convergente a $B \in \mathcal{F}$, cioè

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$$

e

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = B.$$

Allora

$$P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n).$$

Teorema 9 (Disuguaglianza di Boole).

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Dimostrazione.

Caso $n = 2$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^2 F_i\right) &= P(F_1 \cup F_2) \\ &= P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \\ &\leq P(F_1) + P(F_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 P(F_i) \end{aligned}$$

Supponiamo che la disuguaglianza sia vera per n (ipotesi di induzione). Allora

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n F_i \cup F_{n+1}\right) \\ &\leq P(F_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) \\ &\leq P(F_{n+1}) + \sum_{i=1}^n P(F_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(F_i) \end{aligned}$$

□

Teorema 10 (Lemma di Borel-Cantelli).

1. Sia (A_n) una successione di eventi e E l'evento "Esiste un infinito numero di valori di n per i quali A_n si realizza."

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < \infty$, allora $P(E) = P(A_n \text{ i.o.}) = 0$. Quindi $P(E^c) = 1$ e, con probabilità 1, esiste solo un numero finito di n per i quali A_n si realizza. [i.o. = si realizza per infiniti n]

Dimostrazione. Sia

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

allora

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \underbrace{\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right)}_{F_{n+1}} = A_n \cup F_{n+1},$$

e quindi $F_{n+1} \subset F_n$, da cui (F_n) è una successione decrescente.

Inoltre:

$$P(E) = P(A_n \text{ i.o.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right)$$

Per la continuità delle probabilità:

$$P(E) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$$

Per la disuguaglianza di Boole:

$$P(F_n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$

Si sa che se una serie converge il suo termine generale converge a zero

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = 0 \text{ se } \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) \text{ converge.}$$

Quindi:

$$0 \leq P(A_n \text{ i.o.}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = 0$$

da cui $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$. □

Teorema 11 (Disuguaglianza di Markov).

Sia X una variabile aleatoria con $X \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Allora

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Definizione 1. Si chiamano eventi asintotici gli eventi

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\},$$

che rimangono gli stessi anche se cambia un numero finito di loro eventi elementari ω_i .

Teorema 12 (Legge 0-1 di Kolmogorov). Per gli eventi asintotici la probabilità è 0 oppure 1.

Definizione 2. Si chiamano eventi invarianti per traslazione gli eventi

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\},$$

che rimangono gli stessi anche se si traslano le configurazioni ω , secondo il gruppo delle traslazioni di \mathbb{Z}^2 .

Teorema 13. Se un evento è invariante per traslazione, la sua probabilità è 0 o 1.

Riferimenti bibliografici

- [1] C. Ngô, H. Ngô. *Physique statistique, à l'équilibre et hors d'équilibre*. Masson, 1997.
- [2] G. Englund, T. Koski. *Borel-Cantelli lemmas and the law of the large numbers*. Matematisk statistik, KTH, 2008.
- [3] A. Kherani. *Percolation and Random Graphs*. IIT Delhi, 2007.
- [4] G. Grimmett. *Percolation*. Springer, 1999.
- [5] J. E. Steif. *A mini course on percolation theory*. Göteborg University, 2009.
- [6] N. Chabot. *La Percolation, un modèle des phénomènes de porosité*. JME Lyon **1**, Numero 2, 1994.
- [7] Y. Velenik. *Probabilités et Statistique*. Université de Genève, 2011.
- [8] C. Ferrari. *Probabilità*. Liceo Cantonale di Locarno, 2011.
- [9] <http://www.wikipedia.org/>
- [10] <http://www.ripmat.it/mate/1/1e/1eac.html>
- [11] <http://www.treccani.it/enciclopedia/percolazione/>
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Amas_de_percolation.png
(Immagine di copertina)
- [13] http://www.museum.state.il.us/muslink/pdfs/ks_hex-2_1.jpg
- [14] <http://www.grahampoulter.com/projects/applied-mathematics/other>