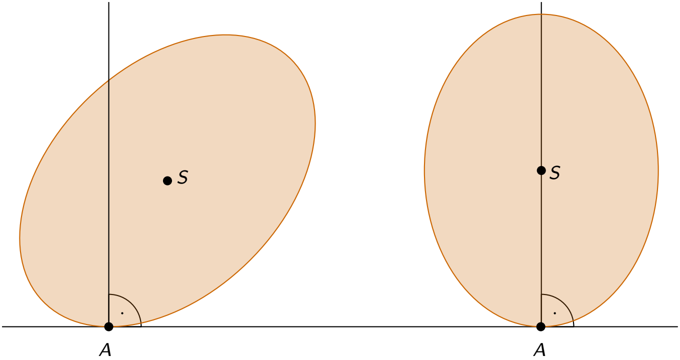
Vom Gömböc und von konvexen Kurven

Norbert Hungerbühler

ETH Zürich

Stehaufmännchen

Ein strikt konvexer Körper auf einer horizontalen Ebene ist im **Gleichgewicht**, wenn sich der Schwerpunkt senkrecht über dem Auflagepunkt befindet (Momentensatz von Varignon und Drallsatz).



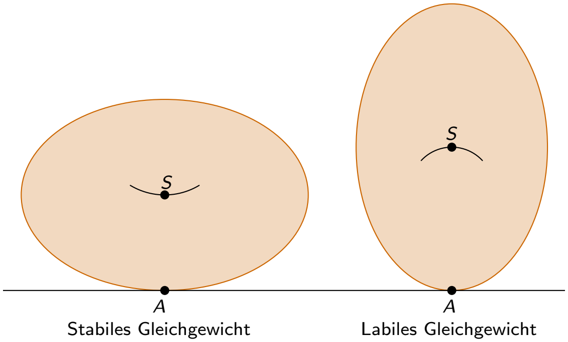
Ungleichgewicht

Gleichgewicht

Stehaufmännchen

Eine Gleichgewichtslage entspricht einem **kritischen Punkt der potentiellen Energie** (Hauptsatz der Zahnradtheorie, siehe später).

Das Gleichgewicht ist **stabil/labil**, falls die potentielle Energie des Körpers in dieser Position ein striktes lokales Minimum/Maximum hat.



Video works only with Adobe Reader.
Set security options to allow animation.

slow normal play/pause stop

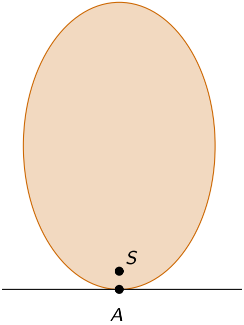
Video works only with Adobe Reader.
Set security options to allow animation.

slow normal play/pause stop

Stehaufmännchen

Ein **Stehaufmännchen** ist ein konvexer Körper mit nur einer stabilen Gleichgewichtslage.

Dies wird üblicherweise erreicht, indem eine schwere Metallkugel im Inneren des Körpers den Schwerpunkt in die Nähe des Randes bringt.



Frage: Geht das auch ohne diesen Trick???

Ebene Stehaufmännchen

Ein ebenes Stehaufmännchen ist eine strikt konvexe Kurve mit einem beliebig festgelegten Schwerpunkt mit genau zwei Gleichgewichtslagen (also eine stabile und eine instabile).

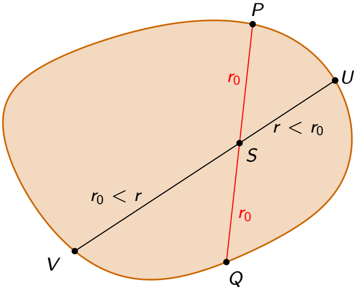
Satz

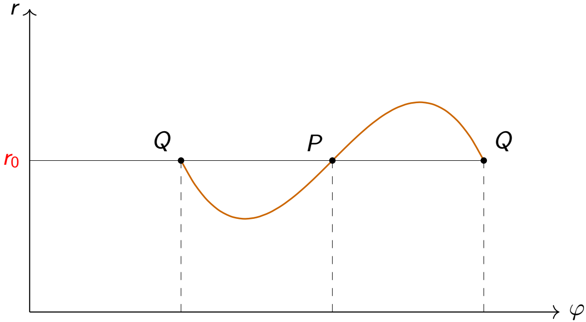
Es gibt kein ebenes Stehaufmännchen bezüglich des natürlichen Flächenschwerpunkts.

Beweis. Parametrisierung der Kurve durch Polarkoordinaten bezüglich des Schwerpunkts:

$$[0, 2\pi) \to \mathbb{R}_+, \quad \varphi \mapsto r(\varphi)$$

Dann hat r mindestens vier lokale Extrema. Die Gegenannahme führt zum Widerspruch.

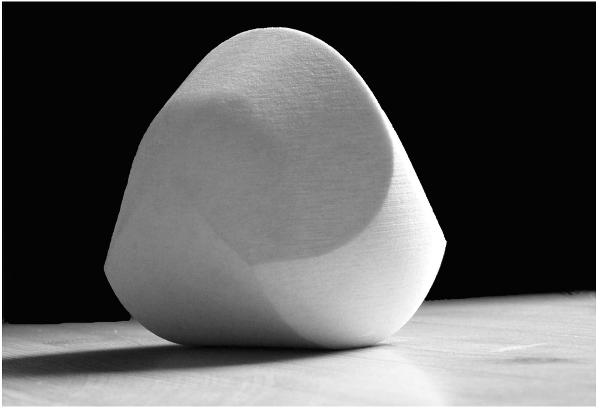



r
r_0
Q
P
Q
φ

Aber in drei Dimensionen. . .

Der Gömböc

Gábor Domokos und Péter Várkonyi 2006



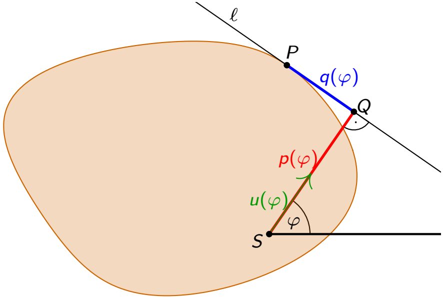
Der Gömböc

Gábor Domokos und Péter Várkonyi 2006

Zurück zu ebenen Kurven

Streng konvexe Gebiete können durch ihre Stützfunktion parametrisiert werden:

$$u(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$



$$P(\varphi) = p(\varphi)u(\varphi) + q(\varphi)u'(\varphi)$$

Es folgt wegen $u'' = -u$:

$$P' = u(p' - q) + u'(p + q') \parallel u' \iff q = p'$$

und $p + q' = p + p'' > 0$ ist der Krümmungsradius in P.

Beobachtungen

- Eine Gleichgewichtslage liegt genau dann vor, wenn $p'(\varphi) = 0$
- Die Gleichgewichtslage ist stabil/labil genau dann, wenn $p(\varphi)$ ein lokales Minimum/Maximum hat.
- Die Evolute der Randkurve hat die Darstellung

$$\begin{aligned} e(\varphi) &= P(\varphi) - u(\varphi)(p(\varphi) + p''(\varphi)) \\ &= p'(\varphi)u'(\varphi) - p''(\varphi)u(\varphi) \end{aligned}$$

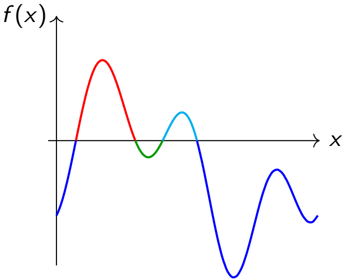
  D.h. die Evolute hat (im Vergleich zur Originalkurve) als Stützfunktion p' und ist um 90° gedreht.
- Alle Parallelkurven haben dieselbe Evolute.
- Die Randkurve ist von der Klasse C^n genau dann, wenn p von der Klasse C^n ist (dies ist nicht trivial).

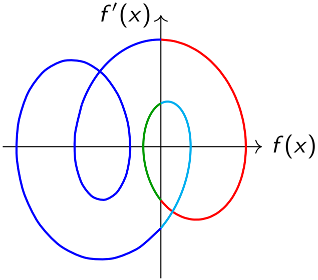
Frage: Kann man anhand von *geometrischen Eigenschaften* der Randkurve die Anzahl der Gleichgewichtslagen in Bezug auf einen gegebenen Schwerpunkt ermitteln?

Ein nettes Lemma

Lemma

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stetig differenzierbare Funktion, die nur einfache Nullstellen besitzt. Dann ist die Anzahl Nullstellen von f die doppelte Umlaufzahl der Kurve $[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), f'(x))$ bezüglich des Ursprungs.

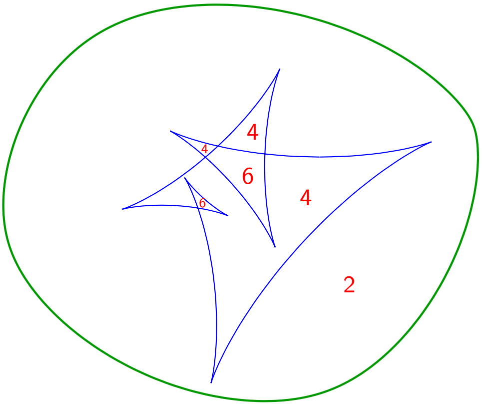




Evolute und Gleichgewichte

Satz

Sei γ eine streng konvexe Kurve und S ein gegebener Schwerpunkt, der nicht auf der Evolute von γ liegt. Dann ist die Anzahl Gleichgewichtslagen von γ bezüglich S genau zwei mal die Umlaufzahl der Evolute um S plus zwei.



Beweis. Die Kurve γ sei parametrisiert durch die Stützfunktion p bezüglich des gegebenen Schwerpunkts.

Sei m die Umlaufzahl der Evolute und n die Anzahl Nullstellen von p'.

Die Evolute ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} e(t) &= u'(t)p'(t) - u(t)p''(t) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}}_{=R_t} \begin{pmatrix} -p''(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Umlaufzahl von (p', p'') ist $n/2$ (Lemma), also auch diejenige von $(-p'', p')$.

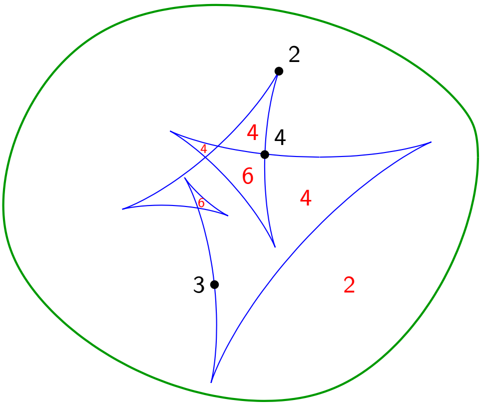
Der Faktor R_t bewirkt eine Umdrehung im Gegenuhrzeigersinn.

Also ist die Umlaufzahl der Evolute $m = \frac{n}{2} - 1$, und somit $n = 2m + 2$.

Für Punkte auf der Evolute gilt:

Satz

Sei γ eine streng konvexe Kurve und S ein gegebener Schwerpunkt auf der Evolute. Dann ist die Anzahl Gleichgewichtslagen von γ bezüglich S das Mittel der Anzahl Gleichgewichtslagen um diesen Punkt herum.



Satz über die Regularität

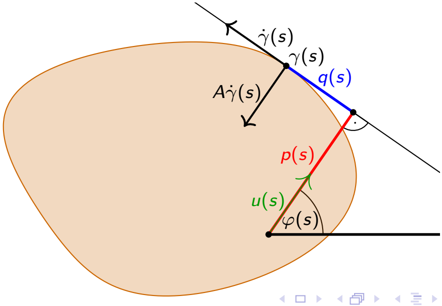
Sei γ eine streng konvexe Kurve der Klasse C^n. Dann ist auch die Stützfunktion p von der Klasse C^n.

Beweis. Die Kurve sei mit $\gamma \in C^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert. s bestimmt dann $\gamma(s)$, $\dot\gamma(s)$ und $\ddot\gamma(s) = A\dot\gamma(s) = -u(s)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} p(s) &= -\langle \gamma(s), A\dot\gamma(s)\rangle \in C^{n-1} \\ q(s) &= \quad \langle \gamma(s), \dot\gamma(s)\rangle \quad \in C^{n-1}. \end{aligned}$$



Es gilt

$$\varphi(s) = \arg \dot{\gamma}(s) - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{\dot{\gamma}_1(s)}{\dot{\gamma}_2(s)} \in C^{n-1}.$$

Also gilt für die Parametrisierung

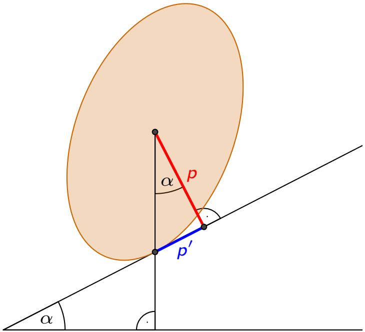
$$\varphi \mapsto q(s(\varphi)) \in C^{n-1}.$$

Wie gesehen ist aber $p(\varphi)$ eine Stammfunktion von $q(\varphi)$, und somit $p(\varphi) \in C^n$.

Schiefe Gömböc-Kurven

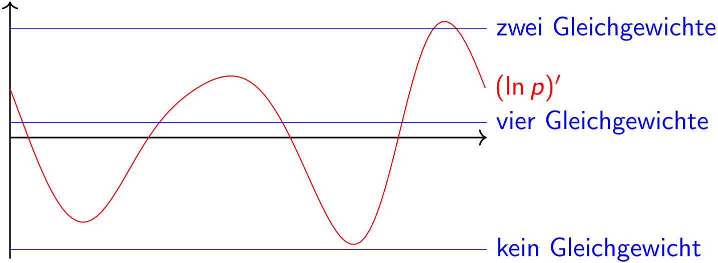
Satz

Für schiefe Ebenen existieren ebene Kurven mit nur einer stabilen Gleichgewichtslage, und solche mit überhaupt nur einer Gleichgewichtslage.



Gleichgewichtsbedingung $\tan\alpha = \frac{p'}{p} = (\ln p)'$

Horizontalen auf verschiedenen Höhen $\tan\alpha$:



Video works only with Adobe Reader.
Set security options to allow animation.

slow normal play/pause stop